

## ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

18. Band, Heft 4

21. Juni 1938

S. 145—192

## Gruppentheorie.

Amato, Vincenzo: Sul rango del gruppo totale di sostituzioni sopra  $n$  lettere. Rend. Circ. mat. Palermo 61, 83—86 (1937).

L'Autore dà una più semplice dimostrazione del suo teorema sul rango del gruppo totale  $G_n$  di sostituzioni su  $n$  elementi (questo Zbl. 4, 51 e 10, 393). Richiamata la definizione di „altezza“ di una sostituzione di  $G_n$  — già da lui introdotta nei citati lavori — dimostra che se  $\rho$  è il „rango“ di  $G_n$  (cioè il massimo genere dei sottogruppi fondamentali di  $G_n$ ), non può esistere una sostituzione di  $G_n$  di altezza maggiore di  $\rho$ , mentre l'altezza di ogni sostituzione invariante propria di un sottogruppo fondamentale di  $G_n$  di genere  $\rho$  non può essere minore di  $\rho$ . Ne conclude quindi che il rango  $\rho$  di  $G_n$  è uguale alla massima altezza delle sostituzioni di  $G_n$ . M. Cipolla (Palermo).

Tchounikhin, S. A.: Über die Gruppen mit vorgegebenen Untergruppen. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 18, 9—10 (1938).

Mitteilung einer Reihe von Sätzen über Gruppen, deren sämtliche Untergruppen gewisse Eigenschaften haben, z. B. direktes Produkt ihrer Sylowgruppen sind. Als Methode wird die schon früher vom Autor (s. dies. Zbl. 12, 342) verwendete Verlagerung in eine Untergruppe benutzt, doch sind die Beweise nicht angegeben. Magnus.

Miller, G. A.: Groups having a maximum set of independent generators of the same order. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 24, 91—94 (1938).

Miller, G. A.: Groups having a maximum number set of conjugate independent generators. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 24, 94—97 (1938).

Hirsch, K. A.: On infinite soluble groups. I. Proc. London Math. Soc., II. s. 44, 53—60 (1938).

Eine unendliche Gruppe  $G$  heißt auflösbar, wenn es eine endliche Kette von Untergruppen  $G_i$  derart gibt, daß  $G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_n = E$ ,  $G_{i+1}$  Normalteiler in  $G_i$  und  $G_i/G_{i+1}$  abelsch ist ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ). Da zu einer befriedigenden Kenntnis dieser Gruppen ein vollständiger Überblick über alle möglichen Typen unendlicher abelscher Gruppen gehören würde, ist die Lösung dieses Problems gegenwärtig völlig unangreifbar. Verf. beschränkt sich auf sogenannte  $S$ -Gruppen; das sind auflösbare Gruppen, in denen die Faktorgruppen  $G_i/G_{i+1}$  endlich viele erzeugende Elemente haben, und gibt zwei äquivalente Definitionen der  $S$ -Gruppen an. Da eine abelsche Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden direktes Produkt zyklischer Gruppen ist, kann die obige Kette „verfeinert“ werden derart, daß alle  $G_i/G_{i+1}$  zyklische Gruppen — und, wenn endlich, von Primzahlordnung — sind. Eine solche Kette heißt  $A$ -Reihe. Verf. zeigt, daß in zwei  $A$ -Reihen von  $G$  die unendlichen Faktorgruppen in gleicher Anzahl auftreten. Während die  $A$ -Reihen in gewisser Analogie zu den Kompositionsreihen stehen, wird noch eine Zerlegung in  $B$ -Reihen angegeben, die etwa der in charakteristische Reihen entspricht. Hierin sind die Rangzahlen der unendlichen  $G_i/G_{i+1}$  invariant. Wesentliche Schwierigkeiten bestehen hingegen in beiden Fällen, ähnliche Ergebnisse für die endlichen  $G_i/G_{i+1}$  zu finden, und Verf. kündigt eine weitere Arbeit in dieser Richtung an. Ulm (Münster i. W.).

Hall, Marshall: Group rings and extensions. I. Ann. of Math., II. s. 39, 220—234 (1938).

Gegeben seien zwei Gruppen  $A$  und  $H$ . Gesucht sind alle Erweiterungen  $G$  von  $A$  durch  $H$  (d. h. alle Gruppen  $G$ , die  $A$  als Normalteiler enthalten, so daß  $G/A = H$  ist) mit den folgenden Eigenschaften: Es seien  $u, v, \dots$  die Elemente von  $H$ ,  $\bar{u}, \bar{v}, \dots$



Repräsentanten der zugehörigen Nebengruppen von  $A$  in  $G$  und  $\chi(u)$  der Automorphismus von  $A$ , den man erhält, wenn man jedem Elemente  $\alpha$  von  $A$  das durch  $\bar{u}^{-1}\alpha\bar{u} = \alpha^u$  erklärte Element  $\alpha^u$  von  $A$  zuordnet. Dann sollen  $\chi(u), \chi(v), \dots$  eine zu  $H$  homomorphe Gruppe  $\chi$  (bestehend aus Automorphismen von  $A$ ) bilden, und es soll für beliebige Paare  $\bar{u}, \bar{v}$  stets  $\overline{uv} = \bar{u}\bar{v}(u, v)$  gelten, wobei das Element  $(u, v)$  im Zentrum  $B$  von  $A$  enthalten ist.  $G$  heiße dann eine  $H$ - $\chi$ -Erweiterung von  $A$ ; das zu dieser gehörige Faktorensystem [d. h. die Gesamtheit der Elemente  $(u, v)$ ] heiße mit dem Faktorensystem  $(u, v)^*$  äquivalent, wenn  $(u, v)^*$  aus  $(u, v)$  dadurch hervorgeht, daß man  $\bar{u}, \bar{v}, \dots$  durch Multiplikation mit Elementen aus  $B$  abändert. Sind  $(u, v)_1$  und  $(u, v)_2$  Faktorensysteme zweier  $H$ - $\chi$ -Erweiterungen, so ist auch das durch  $(u, v)_3 = (u, v)_1(u, v)_2$  erklärte System von Elementen ein solches; die Klassen äquivalenter Faktorensysteme bilden bei dieser Multiplikation eine Gruppe, die sogenannte Gruppe der  $H$ - $\chi$ -Erweiterungen von  $A$ . In dieser teilt die Ordnung jedes Elementes sowohl die Ordnung von  $H$  wie das kleinste gemeinsame Vielfache der Ordnungen der Elemente von  $B$ . Es seien nun  $x, y, \dots$  Erzeugende und  $\Phi_i(x, y, \dots) = 1$  ( $i = 1, \dots, r$ ) definierende Relationen von  $H$ . Es sei  $F$  eine freie Gruppe mit den Erzeugenden  $x^*, y^*, \dots$ ;  $R$  sei der kleinste die „Worte“  $\Phi_i(x^*, y^*, \dots)$  enthaltende Normalteiler von  $F$  und  $C$  die Kommutatorgruppe von  $R$ .  $\bar{x}, \bar{y}, \dots$  seien die  $\bar{x}^*, \bar{y}^*, \dots$  entsprechenden Erzeugenden von  $F/C$ , es wird also  $\Phi_i = \Phi_i(\bar{x}, \bar{y}, \dots)$  ein Element der abelschen Gruppe  $R/C$ . Ist  $\alpha$  ein Element von  $R/C$ , so kann man für  $\bar{x}^{-1}\alpha\bar{x}$  kurz  $\alpha^x$  schreiben, da dieses Element nur von der  $x$  zugeordneten Nebengruppe von  $R/C$  in  $F/C$  abhängt. Indem man  $(\alpha^u)^v = \alpha^{uv}$  und  $\alpha^u\alpha^v = \alpha^{u+v}$  setzt, kann man allgemein ein Element  $\alpha^h$  erklären, wobei  $h$  ein beliebiges Element aus dem Gruppenring  $H^*$  von  $H = F/R$  ist ( $H^*$  hat den Ring der ganzen Zahlen als Koeffizientenbereich). Sind  $\xi, \eta, \dots$  beliebige Elemente aus  $R/C$ , so wird  $\Phi_i(\xi\bar{x}, \eta\bar{y}, \dots)$  gleich  $\Phi_i(\bar{x}, \bar{y}, \dots)\xi^{x_i}\eta^{y_i}\dots$ , wobei  $x_i, y_i, \dots$  Elemente aus  $H^*$  sind. Nun gilt: Sind  $h_i$  Elemente aus  $H^*$ , so ist dann und nur dann  $\prod_{i=1}^r \Phi_i^{h_i} = 1$ , wenn  $\sum x_i h_i = \sum y_i h_i = \dots = 0$

ist. Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich die Gruppe der  $H$ - $\chi$ -Erweiterungen von  $A$  als Quotient zweier Gruppen kennzeichnen, die  $r$ -gliedrige Vektormoduln mit Elementen aus  $B$  als Vektorkomponenten sind (die abelsche Gruppe  $B$  ist hierbei additiv zu schreiben). — Beim Beweise ergibt sich noch: Nennt man einen Vektor  $a$  mit Komponenten aus einem Ring  $\mathfrak{R}$  einen linksannullierenden Faktor des Vektors  $b$ , wenn das innere Produkt  $(a, b) = 0$  ist, und bezeichnet man als rechts- (bzw. links-) lineare Hülle eines Vektormoduls  $M$  den Modul der Vektoren, die rechts- (links-) annullierende Faktoren der sämtlichen für alle Vektoren aus  $M$  links- (rechts-) annullierenden Faktoren sind, so ist für den Fall, daß  $\mathfrak{R}$  eine halbeinfache Algebra ist, jeder Vektormodul  $M$  aus  $\mathfrak{R}$  seine eigene (rechts- und links-) lineare Hülle. Für weitere Sätze, u. a. auch für ein Kriterium für direkte Zerlegbarkeit einer endlichen Gruppe, sei auf die Arbeit selber verwiesen.

Magnus (Frankfurt a. M.).

**Osima, Masaru:** Über die Darstellung einer Gruppe durch halblinare Transformationen. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 20, 1—5 (1938).

Gesucht sind die Darstellungen einer Gruppe  $\mathfrak{G}$  in halblinaren Transformationen mit Koeffizienten aus einem Körper  $K$ . Dabei wird jedem  $G$  aus  $\mathfrak{G}$  eine Matrix  $\Gamma G$  festen Grades und ein Automorphismus  $S_G$  von  $K$  zugeordnet mit den Darstellungsbedingungen:  $\Gamma(GG') = (\Gamma G)^{S_{G'}} \Gamma G'$ ,  $S_{GG'} = S_G \cdot S_{G'}$ . Vorausgesetzt wird, daß  $\mathfrak{G}$  durch den festen Homomorphismus  $G \rightarrow S_G$  auf eine endliche Gruppe  $\mathfrak{A}$  aus Automorphismen von  $K$  abgebildet wird. Dabei werde genau der Normalteiler  $\mathfrak{H}$  auf 1 abgebildet und es sei  $k$  der zu  $\mathfrak{A}$  gehörige Unterkörper, also  $K$  Galoissch über  $k$  von einem gewissen Grade  $n$ . — Zwei „Darstellungen“  $\Gamma$  und  $\Delta$  heißen äquivalent, wenn  $\Delta G = Q(\Gamma G)Q^{-1}$  mit fester nichtsing. Matrix  $Q$  lösbar ist. Das ist genau dann der Fall, wenn die von  $\Gamma$  bzw.  $\Delta$  herrührenden Darstellungen von  $\mathfrak{H}$  äquivalent sind (Satz 1, nach Weyl und Schur). Eine „Darstellung“ von  $\mathfrak{G}$  ist genau dann voll-



reduzibel, wenn die zugehörige Darstellung von  $\mathfrak{H}$  es ist (Satz 2). — Die Darstellungen  $H \rightarrow \mathfrak{D}H$  und  $H \rightarrow \overline{\mathfrak{D}}H$  von  $\mathfrak{H}$  heißen konjugiert unter  $\mathfrak{G}$ , wenn  $\overline{\mathfrak{D}}H = Q \cdot \mathfrak{D}(GHG^{-1}) \cdot Q^{-1}$  mit festem  $G$  aus  $\mathfrak{G}$  und fester nicht ausgearteter Matrix  $Q$  lösbar ist. Zu einer irreduziblen „Darstellung“ von  $\mathfrak{G}$  gehört eine vollreduzible Darstellung von  $\mathfrak{H}$ , deren irreduzible Komponenten in endlich viele Sätze unter  $\mathfrak{G}$  konjugierter Darstellungen von  $\mathfrak{H}$  zerfallen (Satz 3). — Sei  $\mathfrak{D}$  eine „Darstellung“ einer zwischen  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{H}$  gelegenen Gruppe  $\mathfrak{G}_1$  vom Index  $m$  unter  $\mathfrak{G}$ . Die durch  $\mathfrak{D}$  induzierte „Darstellung“  $\Gamma_{\mathfrak{D}}$  von  $\mathfrak{G}$  wird erklärt durch die Formel:  $\Gamma_{\mathfrak{D}} G = (\mathfrak{D}^{S_{G_k}}(G_i G G_k^{-1}))$ , wobei  $\mathfrak{G} = \sum_1^m \mathfrak{G}_1 G_i$ , ferner

$\mathfrak{D}X = 0$  für alle  $X \notin \mathfrak{G}_1$ . — Wenn  $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{D}$  irreduzibel, so ist  $\Gamma_{\mathfrak{D}}$  vollreduzibel und zerfällt in lauter äqu. irr. Bestandteile (Satz 4). Ist  $\chi$  der zu  $\mathfrak{D}$  gehörige Charakter, so bilden die Elemente  $G$ , für die  $\chi(\mathfrak{D}H) = \chi(\mathfrak{D}^{S_G}(GHG^{-1}))$ , eine Untergruppe  $\mathfrak{G}_\chi$  zwischen  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{H}$ . Die durch  $\mathfrak{D}$  induzierte Darst. von  $\mathfrak{G}_1$  ist Vielfaches einer irreduziblen „Darstellung“  $\mathfrak{D}^*$  von  $\mathfrak{G}_1$ .  $\Gamma_{\mathfrak{D}}$  ist Vielfaches der irreduziblen „Darstellung“  $\Gamma_{\mathfrak{D}^*}$  von  $\mathfrak{G}$  (Satz 5—7). Falls  $\mathfrak{H}$  als Faktor einer direkten Zerlegung von  $\mathfrak{G}$  auftritt, so ist die Beziehung zwischen den irr. Darst. von  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{H}$  eineindeutig (Satz 8). — Hieraus folgt für endliche Gruppen  $\mathfrak{G}$ : Jede „Darstellung“ ist vollreduzibel, wenn die Charakteristik von  $K$  kein Teiler der Ordnung von  $\mathfrak{H}$  ist (Satz 9). Der Grad jeder irr. „Darst.“ ist Teiler der Gruppenordnung (Satz 12). Falls außerdem  $k$  alle absolut einfachen Charaktere von  $\mathfrak{H}$  enthält und die Charakteristik  $p$  von  $K$  nicht zugleich in der Ordnung von  $\mathfrak{H}$  und von  $\mathfrak{A}$  aufgeht, so ist die Anzahl der nichtäquiv. irr. „Darstellungen“ von  $\mathfrak{G}$  gleich der Anzahl der in  $\mathfrak{H}$  enthaltenen Klassen unter  $\mathfrak{G}$  konjugierter Elemente, deren Ordnung nicht durch  $p$  teilbar ist. *Zassenhaus.*

**Cartan, Élie:** Les représentations linéaires des groupes de Lie. J. Math. pures appl., IX. s. 17, 1—12 (1938).

Ein neuer Beweis des von Ado (dies. Zbl. 12, 249) zuerst bewiesenen Satzes, daß jede Liesche Infinitesimalgruppe durch eine Liesche Gruppe von linearen Transformationen treu dargestellt werden kann. Der Beweis wird zuerst für die Gruppen vom Range Null, dann für die auflösbaren und schließlich für alle Lieschen Gruppen geführt. Gleichzeitig ergibt sich, daß eine einfach zusammenhängende, auflösbare Liesche Gruppe eine treue Darstellung durch lineare Transformationen besitzt. Der Beweis fußt auf dem folgenden fundamentalen Hilfssatz: Wenn die endlichen Gleichungen einer Lieschen Transformationsgruppe (oder eines Gruppenkeimes) die Gestalt

$$x'_i = \sum_{k=1}^N P_{ik}(a) X_k(x) \quad (i = 1, \dots, n)$$

haben, wobei die  $N$  Funktionen  $X_k(x)$  linear unabhängig sind, so gestattet die Gruppe (der Gruppenkeim) eine treue Darstellung durch lineare Transformationen.

*van der Waerden* (Leipzig).

## Analysis.

**Carruccio, E.:** La quadratura delle curve secondo Newton. Period. Mat., IV. s. 18, 1—32 (1938).

**Pompeiu, D.:** Une équation fonctionnelle à propos du centre de gravité de l'aire d'un triangle. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 8, 3—5 (1937).

Poinsot hat in den *Éléments de Statique* die Bestimmung des Schwerpunkts einer Dreiecksfläche durch einfache Symmetriebetrachtungen auf die Auflösung der Funktionalgleichung  $2f(2x) = f(x) + x$  zurückgeführt. Die einzige bei  $x = 0$  stetige Lösung ist  $f(x) = x/3$ . Verf. bemerkt, daß die allgemeinste Lösung  $f(x) = \frac{B}{x} + \frac{x}{3}$  mit beliebiger Konstante  $B$  ist.

*W. Fenchel* (Kopenhagen).

- Bonferroni, Carlo E.:** *Intorno alle funzioni distributive su coppie particolari.* Boll. Un. Mat. Ital. 17, 32—36 (1938).
- Levi, Beppo:** *Qualche considerazione di matematica finanziaria.* Boll. Un. Mat. Ital. 17, 36—38 (1938).

Eine finanzmathematische Fragestellung führt auf folgenden Satz: Es sei  $f(x)$  erstens stetig für  $x \geq 0$ , zweitens in  $x = 0$  rechtsseitig differenzierbar, und drittens gebe es zu jedem  $z > 0$  zwei Zahlen  $x$  und  $y$  mit

$$x > 0, \quad y > 0, \quad x + y = z, \quad f(x) + f(y) = f(z).$$

Dann ist  $f(x) = kx$ ;  $k$  konstant. Keine der Voraussetzungen kann entbehrt werden. Die Schlußweise des Verf. läßt sich auch bei anderen Funktionalgleichungen verwenden. — In der zweiten Note wird gezeigt, daß die finanzmathematische Fragestellung in natürlicherer Weise dazu führt, statt der beiden ersten Voraussetzungen die folgenden zu machen:  $f(x)$  sei für  $x \geq 0$  nach oben halbstetig und nichtnegativ; ferner gelte  $f(x) + f(y) \leq f(x + y)$  für alle nichtnegativen  $x, y$ . Aus diesen und der obigen dritten Voraussetzung folgt ebenfalls  $f(x) = kx$ . W. Fenchel.

### Reihen:

**Bhatnagar, P. L.:** *On the summability of the conjugate series of Fourier series.* Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 7, 85—90 (1938).

Let  $f(x)$  be an  $L$ -integrable function of period  $2\pi$ , and let

$$\psi(t) = \psi_x(t) = f(x + t) - f(x - t), \quad \Psi(t) = \int_0^t \psi(u) du.$$

The series  $\sum (a_n \sin nx - b_n \cos nx)$ , conjugate to the Fourier series of  $f(x)$ , is summable  $(C, \delta)$ , where  $\delta > 1$ , to the sum  $-\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \Psi(t) \operatorname{cosec}^2 \frac{1}{2}t dt$  at the point  $x$ , provided

this integral exists as a non-absolutely convergent integral. — A similar result, but with additional hypotheses concerning the function  $\Psi(t)$ , was obtained earlier by B. N. Prasad (this Zbl. 4, 347).

A. Zygmund (Wilno).

**Hartman, Philip:** *On a class of arithmetical Fourier series.* Amer. J. Math. 60, 66—74 (1938).

Betrachtet werden die Reihen

$$(1) f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx}, \quad a_0 = 0; \quad (2) \sum_{m=1}^{\infty} c_m f(mx); \quad (3) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{ikx},$$

wobei die Reihe (2) für eine Konstantenfolge  $\{c_m\}$  formal gedacht ist und (3) die trigonometrische Reihe bezeichnet, die man erhält, wenn man jedes Glied  $c_m f(mx)$  von (2) vermöge (1) in eine Fourierreihe ( $L$ ) entwickelt, diese Fourierreihen in bezug auf  $m$  summiert und die so erhaltene Doppelsumme in die einfache Summe (3) formal umordnet. Unter den Annahmen  $a_n = O(|n|^{-\alpha})$ ,  $c_m = O(m^{-\beta})$ ,  $\min(\alpha, \beta) > \frac{1}{2}$  wird mittels einer Methode des Ref. (dies. Zbl. 16, 397) folgendes bewiesen: (I) Es gibt eine Funktion  $F(x)$  der Klasse  $L^p$  derart, daß die Reihe (2) im Mittel ( $L^p$ ) zu  $F(x)$  konvergiert, wobei  $p$  unterhalb des reziproken Wertes ( $> 2$ ) von  $1 - \min(\alpha, \beta)$  beliebig oder aber beliebig groß gewählt werden kann, je nachdem  $\min(\alpha, \beta) < 1$  oder  $\min(\alpha, \beta) \geq 1$  ist. (II) Die trigonometrische Reihe (3) ist eine Fourierreihe, und zwar die von  $F(x)$ . Endlich: (III) Die Reihe (3) konvergiert fast überall (also fast überall zu  $F$ ). Wie in der genannten Arbeit des Ref., ist (II) die Hauptsache, während früher (Landau, Chowla, Walfisz, Davenport) man sich mit einer formalen Aussage (III) begnügt hat. In Wirklichkeit kann (III) aus (II) auf Grund der Theorie der Fourierreihen unmittelbar gefolgert werden. Auf derselben Grundlage (de la Vallée Poussin'sches Kriterium für  $f(x)$ , zusammen mit einer entsprechenden Einschränkung von  $\{c_m\}$ ) erhält man eine hinreichende Bedingung, unter welcher das „fast überall“ von (III)



durch „überall“ ersetzbar ist, sowie eine hinreichende Bedingung ( $\min(\alpha, \beta) > \frac{3}{2}$  und  $|f(x)| < \text{konst.}$ ), unter welcher (I) mit „fast überall“ an Stelle von „im Mittel ( $L^p$ )“ gilt.  
*Wintner* (Baltimore).

### Spezielle Funktionen:

**Meijer, C. S.:** Einige Integraldarstellungen für die Lommelsche Funktion  $S_{\mu, \nu}(z)$ .  
 Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc., 41, 151—154 (1938).

Ausgehend von der Formel

$$S_{\mu, \nu}(z) = \frac{4z^{\mu-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^{\sigma^{\frac{1}{2}} \arg z} u^{\alpha+\beta-1} K_{\alpha-\beta}(2u) {}_3F_2 \left[ 1, \frac{1+\nu-\mu}{2}, \frac{1-\nu-\mu}{2}; -\frac{4u^2}{z^2} \right] du,$$

$$z \neq 0, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2}, \quad \alpha \text{ und } \beta \text{ beliebig; } \Re(\alpha) > 0, \quad \Re(\beta) > 0$$

(dies. Zbl. 12, 167) findet der Verf., für  $u = \frac{z}{2} \sinh t$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = \frac{3}{2} - \mu$ , ( $\Re(\mu) < \frac{3}{2}$ ), bzw.  $\beta = \frac{1}{2} - \mu$ , ( $\Re(\mu) < \frac{1}{2}$ ), mittels klassischer Transformationsformeln der hypergeometrischen Funktion:

$$S_{\mu, \nu}(z) = z^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} K_{\mu-\frac{1}{2}}(z \sinh t) P_{\nu-\frac{1}{2}}^{\mu-\frac{1}{2}}(\cosh t) \sinh t \cdot \cosh t \cdot dt,$$

$$z \neq 0, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2}, \quad \Re(\mu) < \frac{3}{2}.$$

$$S_{\mu, \nu}(z) = z^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} K_{\mu+\frac{1}{2}}(z \sinh t) P_{\nu-\frac{1}{2}}^{\mu+\frac{1}{2}}(\cosh t) \sinh t \, dt,$$

$$z \neq 0, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2}, \quad \Re(\mu) < \frac{1}{2}.$$

Hierin bedeutet  $P_n^m(w)$  die zugeordnete Legendresche Funktion erster Art. Weiter findet er für  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1 - \frac{\mu}{2}$  bzw.  $\beta = \frac{1-\mu}{2}$  bzw.  $\beta = \frac{3-\mu}{2}$

$$S_{\mu, \nu}(z) = 2^{\frac{\mu}{2}} z^{\frac{\mu}{2}+1} \int_0^{\infty} K_{\frac{\mu}{2}}(z \sinh t) P_{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{\mu}{2}}(\cosh 2t) (\cosh t)^{\frac{\mu}{2}+1} \sinh t \, dt,$$

$$z \neq 0, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2}, \quad \Re(\mu) < 2,$$

$$S_{\mu, \nu}(z) = 2^{\frac{\mu-1}{2}} z^{\frac{\mu+1}{2}} \int_0^{\infty} K_{\frac{\mu+1}{2}}(z \sinh t) \left\{ P_{\frac{\nu}{2}}^{\frac{\mu+1}{2}}(\cosh 2t) + P_{-\frac{\nu}{2}}^{\frac{\mu+1}{2}}(\cosh 2t) \right\} (\cosh t)^{\frac{\mu-1}{2}} \sinh t \, dt,$$

$$z \neq 0, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2}, \quad \Re(\mu) < 1,$$

$$\nu S_{\mu, \nu}(z) = 2^{\frac{\mu-1}{2}} z^{\frac{\mu+3}{2}} \int_0^{\infty} K_{\frac{\mu-1}{2}}(z \sinh t) \left\{ \frac{1+\nu-\mu}{2} P_{\frac{\nu}{2}}^{\frac{\mu-1}{2}}(\cosh 2t) - \frac{1-\nu-\mu}{2} P_{-\frac{\nu}{2}}^{\frac{\mu-1}{2}}(\cosh 2t) \right\} (\cosh t)^{\frac{\mu+1}{2}} \sinh t \, dt,$$

$$z \neq 0, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2}, \quad \Re(\mu) < 3.$$

*S. C. van Veen* (Dordrecht).

**Howell, W. T.:** Integral representations for products of Weber's parabolic cylinder functions. Philos. Mag., VII. s. 25, 456—458 (1938).

Die Weberschen Funktionen können durch Laguerresche Funktionen der Ordnung  $\pm 1/2$  dargestellt werden. Verf. untersucht die Frage, ob für das Produkt zweier Weberscher Funktionen eine analoge bestimmte Integraldarstellung abgeleitet werden

kann wie für das Produkt zweier Laguerrescher Funktionen ganzzahliger Ordnung. Er geht aus von einem bekannten unendlichen Integral, dessen Integrand das Produkt einer Exponentialfunktion, einer Potenz und zweier Weberscher Funktionen gleicher Ordnung ist. Hierauf wendet er die Mellinsche Umkehrformel an und erhält eine Integraldarstellung für das Quadrat einer Weberschen Funktion, wobei der Integrand eine Webersche Funktion der doppelten Ordnungszahl enthält. Hieraus wird eine analoge Integraldarstellung für das Quadrat einer Hermiteschen Funktion abgeleitet. Ausgehend von einer Batemanschen Integraldarstellung für eine Legendresche Funktion erhält Verf. durch Einsetzen in das zuerst genannte bekannte unendliche Integral, dessen Integrand das Produkt zweier Weberscher Funktionen gleicher Ordnung enthält, eine Konturintegraldarstellung für ein solches Produkt Weberscher Funktionen.

*M. J. O. Strutt (Eindhoven).*

**Sharma, J. L.:** On Whittaker's confluent hypergeometric function. *Philos. Mag.*, VII. s. 25, 491—504 (1938).

Es handelt sich zunächst um ein bestimmtes unendliches Integral über das Produkt zweier Whittakerscher Funktionen mit den Indizes  $k, m$  und  $k + 2, m'$ . Für jede Whittakersche Funktion wird ein unendlicher Integralausdruck eingesetzt, dessen Integrand ein Quotient von Gammafunktionen enthält. Durch Vertauschen der Integrationsfolge (die Zulässigkeit wird bewiesen) gelingt es, das eingangs erwähnte Integral zu berechnen. Als besonderer Fall wird  $m = -1/4$  und  $k = 1/2 m + 1/4$  gesetzt und darauf  $m = 1/4$  und  $k = -1/4$ . Im zweiten Integralausdruck, der zwischen den Grenzen 0 und  $\infty$  genommen ist, enthält der Integrand eine Potenz, eine Whittakersche Funktion und eine Webersche Funktion. Bei der Berechnung wird analog wie oben vorgegangen. Im dritten Integralausdruck, mit den gleichen Grenzen wie der zweite, enthält der Integrand das Produkt einer Potenz, einer Exponentialfunktion, einer Legendreschen Funktion und einer Whittakerschen Funktion, und die Berechnung verläuft wieder analog wie oben. Nach einer Darlegung einiger Grundformeln der operatorischen Rechenweise (Darstellung einer Funktion durch ihre Laplacesche Transformierte) wird diese Methode auf die Whittakerschen Funktionen angewandt mit dem Ergebnis, daß eine solche Funktion als Differentialquotient höherer Ordnung einer Funktion niedrigerer Ordnung dargestellt wird (Rekursionsformel) und schließlich als Differentialquotient des Produkts einer Potenz und einer Exponentialfunktion. Endlich wird eine unendliche Reihe, deren Glieder Differentialquotienten Whittakerscher Funktionen enthalten, mit der gleichen Rechenmethode summiert. *Strutt.*

**Dhar, S. C.:** On the operational representation of  $M$ -functions of the confluent hypergeometric type. *Philos. Mag.*, VII. s. 25, 416—425 (1938).

Verf. legt zunächst einige Grundformeln der operatorischen Rechenweise (Darstellung einer Funktion durch ihre Laplacesche Transformierte) dar und wendet sodann diese Methode auf die Differentialgleichung der konfluenten hypergeometrischen Funktionen an. Die Lösungen dieser Differentialgleichung zerfallen in zwei Klassen mit je zwei unabhängigen Lösungen: Die eine Klasse gilt in der Umgebung des Nullpunktes, die andere für sehr große Werte der unabhängigen Veränderlichen. Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit den zwei Lösungen der zuletzt genannten Klasse, welche als  $M$ -Funktionen bezeichnet werden. Die operatorische Darstellung dieser Funktionen wird angegeben, wobei die Laplacesche Transformierte die Form einer hypergeometrischen Reihe multipliziert mit einer Potenz erhält. Hieraus wird die erste Kummersche Rekursionsformel für diese Funktionen abgeleitet. Auch zwei unendliche Integralausdrücke, deren Integranden aus dem Produkt einer Potenz, einer Exponentialfunktion und einer  $M$ -Funktion zusammengesetzt sind, folgen unmittelbar aus diesen operatorischen Darstellungen. Durch weitere Anwendung dieser Methode erhält Verf. drei weitere Rekursionsformeln für die  $M$ -Funktionen. Durch Anwendung des Satzes von Bromwich gelangt Verf. zu einer unendlichen Integraldarstellung für die  $M$ -Funktionen, welche zu einem endlichen Integral vereinfacht wird. *Strutt.*



## Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:

Lemaitre, G., et O. Godart: Généralisation de la méthode de Hill. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 24, 19—23 (1938).

Verff. gehen von der Hillschen Auflösungsmethode der Hillschen Differentialgleichung aus, welche darin besteht, daß eine unendliche Fouriersche Reihe mit unbekannten Koeffizienten in die Differentialgleichung eingesetzt wird, worauf sich ein unendliches lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten ergibt. Sie wenden diese Methode an auf die Lösung von  $n$  simultanen Differentialgleichungen vom Hillschen Typus und führen in bezug auf das sich ergebende Gleichungssystem für die unbekannten Koeffizienten der  $n$  unendlichen Fourierschen Reihen analoge Vereinfachungen durch, wie Hill für seine Gleichung angegeben hat. Zum Schluß wenden Verff. ihre Berechnungen an auf ein Beispiel zweier simultaner homogener linearer Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Cotton, Émile: Sur certains systèmes différentiels admettant des solutions indéterminées. Bull. Sci. math., II. s. 62, 42—50 (1938).

L'auteur démontre pour les systèmes différentiels

$$F_i(x_1, \dots, x_4, dx_1, \dots, dx_4) = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

où les  $F_i$  sont des polynômes homogènes par rapport aux différentielles avec des coefficients analytiques de  $x_1 \dots x_4$ , — que leurs courbes intégrales correspondant à des données initiales quelconques sont remplacées, pour un ensemble  $E$  de valeurs exceptionnelles de ces données initiales, par une multiplicité à plusieurs dimensions qui constitue l'ensemble  $E$ . — Exemples géométriques et mécaniques. *Janczewski*.

Strubecker, Karl: Zur Infinitesimalgeometrie Pfaffscher Mannigfaltigkeiten. Mh. Math. Phys. 46, 233—247 (1938).

In der Lieschen Abbildung:  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z - (px + qy)/2$ ,  $x_4 = p/2$ ,  $x_5 = q/2$  der Flächenelemente  $(x, y, z, p, q)$  des  $R_5$  auf Punkte  $x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5$  eines projektiven  $R_5$  entspricht einer Pfaffschen Mannigfaltigkeit  $M_3$ :  $p = p(x, y, z)$ ,  $q = q(x, y, z)$  eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit  $M_3$  des  $R_5$ , wobei die Integralstreifen der  $M_3$  auf die Kurven des linearen Komplexes  $\mathfrak{K}$ :  $p_{03} + p_{14} + p_{25} = 0$  abgebildet werden. Mit Hilfe dieser Abbildung, und zwar durch Besprechung der Lagemöglichkeiten der  $M_3$  gegenüber dem Komplex  $\mathfrak{K}$  werden die regulären Stellen einer  $M_3$  vom Verf. klassifiziert. Im nichtintegrablen Falle tauchen dabei neben zwei bekannten, mittels Krümmungseigenschaften beschriebenen Modellen infinitesimaler Struktur einer  $M_3$  (vgl. dies. Zbl. 16, 164, Inzinger) vier andere Modelle auf. *O. Borůvka* (Brno).

Mangeron, D.: Sur la dépendance des valeurs caractéristiques de domaines dans certains problèmes à la frontière pour une classe d'équations aux dérivées totales d'ordre supérieur. C. R. Acad. Sci. Roum. 2, 25—28 (1937).

Verf. drückt die Variation  $\delta \lambda_n$  des  $n$ -ten Eigenwertes  $\lambda_n$  der Randwertaufgabe

$$u_{xxyy} - \lambda A(x, y)u = 0, \quad a \leq x \leq c, \quad b \leq y \leq d,$$

$$u(a, y) = u(c, y) = u(x, b) = u(x, d) = 0,$$

durch  $\delta a, \delta b, \delta c, \delta d$  explizit aus. Es ergibt sich, daß  $\lambda_n$  zunimmt, wenn eine oder beide Dimensionen des Rechteckes  $a \leq x \leq c, b \leq y \leq d$  abnehmen. *G. Cimmino*.

Agostinelli, Cataldo: Sul problema di Cauchy per l'equazione delle onde simmetriche rispetto ad un asse. Atti Accad. Sci. Torino 73, 144—160 (1937).

Es handelt sich um die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z).$$

Eine auf dem charakteristischen Kegel mit Scheitel  $x_0, y_0, z_0$  unendlich werdende Grundlösung der adjungierten Gleichung ist

$$v = x / \sqrt{(x + x_0)^2 + (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2} \sqrt{(z - z_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}.$$

Die Anwendung der Reziprozitätsformel auf das Funktionenpaar  $u, v$  liefert mittels



eines geeigneten Grenzübergangs eine Formel, welche die Lösung  $u$  der Gleichung im Punkte  $x_0, y_0, z_0$  durch ihre Werte und die Werte ihrer Ableitung in gewisser Richtung auf dem vom genannten Kegel in einer gegebenen Fläche geschnittenen Flächenstück ausdrückt.

G. Cimmino (Napoli).

### **Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik, Potentialtheorie:**

De la Vallée Poussin, C.: Potentiel et problème généralisé de Dirichlet. Math. Gaz. 22, 17—36 (1938).

L'auteur aboutit par un exposé autonome (conf. faites à Londres en Oct. 37), concis et comportant diverses nouveautés au résultat suivant à peu près connu: Soit  $\Omega$ , dans l'espace ordinaire, un ensemble ouvert connexe (fini ou non) de frontière  $E$  sur laquelle on donne une fonction continue  $u(Q)$ . Il existe une fonction et une seule harmonique dans  $\Omega$ , bornée, tendant vers  $u(Q)$  quand  $M \rightarrow Q$ , sauf peut-être pour un ensemble-frontière de capacité nulle, et cette fonction s'exprime par  $\int_E U(Q) d\mu_P(Q)$ , où  $\mu_P$  est la distribution-frontière venant du balayage de la masse

unité en  $P$ . L'auteur reprend toutes notions essentielles sur le potentiel, et sur la capacité au sens qui lui est dû. Il souligne la loi de réciprocité  $\int_A U d\alpha = \int_E V d\mu$

(distr.  $\geq 0$   $\mu$  et  $\alpha$  sur  $E$  et  $A$  de pot.  $U$  et  $V$ ) introduit un „noyau restreint“, puis utilise, comme Frostman, une minimisation de l'intégrale de Gauss pour arriver au balayage, enfin introduit des lignes „régulières“ et „irrégulières“ aboutissant aux points frontière.

Brelot (Bordeaux).

Brelot, Marcel: Quelques propriétés des fonctions sous-harmoniques et du balayage. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 35—37 (1938).

In Euclidean  $n$ -space ( $n \geq 2$ ) let us consider a bounded domain  $\Delta$  and another domain  $D$  which is completely interior to  $\Delta$ . Let  $F$  be the boundary of  $D$  and  $F_1$  the set of irregular points of  $F$ , in the sense of potential theory. Let the function  $u$  be subharmonic in  $\Delta$ . Denote by  $-m$  the mass distribution on  $\Delta$  which corresponds to  $u$  in the sense of the representation theorem of F. Riesz, and by  $u^*$  and  $\bar{u}$  the least and the best harmonic majorant of  $u$  in  $D$ . Theorem I of the paper states that we have  $u^* = \bar{u}$  if and only if the set  $F_1$  carries no mass. Theorem II is concerned with an application to the sweeping-out process, and theorem III with a new characterization of the external harmonic majorant.

Tibor Radó (Columbus).

Nicolesco, Miron: Sur les fonctions biharmoniques. C. R. Acad. Sci. Roum. 2, 104—108 (1938).

In Fortführung früherer Untersuchungen (dies. Zbl. 14, 350f.) wird gezeigt: Im  $n$ -dimensionalen Raume sei  $u$  in der Kugel  $r \leq R$  regulär,  $\Delta \Delta u = 0$ , und am Rande sei sowohl  $u$  als auch dessen innere Normalableitung positiv. Dann ist im Nullpunkt  $|\text{grad } u(O)| \leq (2n-1)u(O)/2R$ , und diese Ungleichung kann nicht verschärft werden. An einem Beispiel wird ferner gezeigt, daß man im allgemeinen keine Aussagen über das Vorzeichen von  $\partial u / \partial r$  im Innern machen kann.

W. Feller.

### **Funktionentheorie:**

Plancherel, M., et G. Pólya: Fonctions entières et intégrales de Fourier multiples. II. Comment. math. helv. 10, 110—163 (1937).

Let  $F(z_1, \dots, z_n)$  be an entire function of  $n$  complex variables, of exponential type. Let  $(\lambda)$  be a direction in the  $n$ -dimensional Euclidean space characterized by  $n$  components  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,  $\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2 = 1$ . Let  $h(\lambda) = \max_{\alpha} \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-1} \log |F(\alpha_1 - i\lambda_1 r, \dots, \alpha_n - i\lambda_n r)|$  where  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  is a variable point of the  $n$ -dimensional space. Consider only  $2n$  principal directions for which one of the components is  $\pm 1$  and all remaining are 0; the quantity  $c$  which equals the largest of the corresponding  $2n$  values of  $h(\lambda)$ , the authors call the „cardinal growth“ of  $F$  (croissance cardinale). The principal results



of the paper are embodied in the following two theorems. (1) For every  $p > 0$  there exists a constant  $A$  which depends only on  $p$  and  $c$ , such that  $\sum_{m_1, \dots, m_n} |F(m_1, \dots, m_n)|^p < A^n \int_{-\infty}^{\infty} |F(x_1, \dots, x_n)|^p dx_1 \dots dx_n$ . If  $c < \pi$  there exists a constant  $B$  depending only on  $p$  and  $c$ , such that  $\int_{-\infty}^{\infty} |F|^p dx_1 \dots dx_n < B^n \sum |F(m_1, \dots, m_n)|^p$ . In case  $p > 1$  we may take  $B = C^p$  where  $C$  depends only on  $c$ , and if, in addition,  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} F(x_1, \dots, x_{v-1}, z, x_{v+1}, \dots, x_n) e^{-\pi|z|} = 0$  for an arbitrary choice of real values  $x_1, \dots, x_{v-1}, x_{v+1}, \dots, x_n$ , then  $B$  may be taken independent of  $c$ . (2) In order that an entire function  $F(z_1, \dots, z_n)$  be of exponential type and such that  $\int_{-\infty}^{\infty} |F|^p dx_1 \dots dx_n < \infty$  for some  $p > 1$  while the cardinal growth of  $F$  is  $\leq \pi$ , — it is necessary and sufficient that  $F$  could be represented by

$$F(z_1, \dots, z_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i(z_1 t_1 + \dots + z_n t_n)] \{ \Psi(\pi, \dots, \pi) (1 - z_1) \dots (1 - z_n) + \sum \Psi(t_1, \pi, \dots, \pi) z_1 (1 - z_2) \dots (1 - z_n) + \sum \Psi(t_1, t_2, \pi, \dots, \pi) z_1 z_2 (1 - z_3) \dots (1 - z_n) + \dots + \Psi(t_1, t_2, \dots, t_n) z_1 z_2 \dots z_n \} dt, \dots dt_n,$$

where  $\Psi(t_1, \dots, t_n)$  is a continuous function of  $t_1, \dots, t_n$ , of period  $2\pi$  in each  $t_1, \dots, t_n$ , the formal Fourier series of which,  $\Psi(t_1, \dots, t_n) \sim \sum_{m_1, \dots, m_n} c_{m_1, \dots, m_n} \exp[-i(m_1 t_1 + \dots + m_n t_n)]$  is such that  $\sum |m_1 \dots m_n c_{m_1, \dots, m_n}|^p < \infty$  (in the last sum the factor  $|m_k|^p$  is to be replaced by 1 if  $m_k = 0$ ). The paper contains numerous related results and corollaries which for lack of space cannot be mentioned here. At the end of the paper the authors extend to the case of any  $p$  various results which were established for  $p = 2$  in the previous part I of the paper (this Zbl. 16, 360). *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

**Baloun, R.:** Généralisation du théorème du Fatou et des frères Riesz sur quelques classes des fonctions plus générales. Publ. Fac. Sci. Univ. Charles Prague Nr 154, 19 (1937) [Tschechisch].

$w = f(z)$  soit une fonction de la variable complexe  $z$ , régulière en cercle  $|z| < 1$ , et  $\widehat{ab}$  soit un simple l'arc rectifiable dans la plaine  $w$ . La fonction  $f(z)$  ne doit pas gagner des valeurs de l'arc  $\widehat{ab}$  quand  $|z| < 1$ . — De tel fonction existe le théorème généralisé du Fatou et le théorème des frères Riesz en cette forme: Théorème du Fatou: La limite radiale  $\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\varphi}) = f(e^{i\varphi})$  existe pour tous les  $\varphi$  de l'intervalle  $(0, 2\pi)$  avec possible l'exception de l'ensemble de la mesure 0. Théorème des frères Riesz:  $\alpha$  soit un nombre complexe, dont la figure dans la plaine  $w$  est hors de l'arc  $\widehat{ab}$ . Si la limite radiale  $f(e^{i\varphi})$  gagne du valeur  $\alpha$  sur l'ensemble des points  $\varphi$  de la mesure plus grand que 0, il est identiquement  $f(z) \equiv \alpha$  pour tout le cercle  $|z| < 1$ . — Ces théorèmes sont dans le travail justifiés par les simples transformations linéaires et quadratiques des bien connus théorèmes du Fatou et des frères Riesz pour les fonctions avec la valeur absolue bornée. *Autoreferat.*

**Petrovitch, Michel:** Séries de puissances à coefficients nombres entiers comme inversions des intégrales abeliennes. Rev. Ci., Lima 39, Nr 421, 51—56 (1937).

Damit eine Potenzreihe mit ganzzahligen, durch  $10^h$  beschränkten Koeffizienten eine rationale Funktion darstelle, ist notwendig und hinreichend, daß ihr Wert für  $10^{-h}$  rational sei, daß also die Koeffizienten periodisch seien. *Ott-Heinrich Keller* (Berlin).

**Bochner, S.:** A theorem on analytic continuation of functions in several variables. Ann. of Math., II. s. 39, 14—19 (1938).

Unter einer „Tube“ versteht Verf. einen Bereich, der mit einem Punkte  $(z_1^0, \dots, z_n^0)$  alle Punkte  $(z_1^0 + it_1, \dots, z_n^0 + it_n)$ ,  $t_1, t_2, \dots, t_n$  irgendwelche reellen Zahlen, enthält. Es wird bewiesen: Jede Funktion  $f(z_1, \dots, z_n)$ , die in einer Tube  $\mathfrak{T}$  analytisch ist,



ist es gleichfalls in der im elementargeometrischen Sinne konvexen Hülle von  $\mathfrak{L}$ . Diese Hülle ist wieder eine Tube und zugleich Regularitätsbereich (s. auch K. Stein, Die Regularitätshüllen niederdimensionaler Mannigfaltigkeiten; s. dies. Zbl. 17, 74). — Zum Beweise werden Entwicklungen nach Legendreschen Polynomen benutzt. Mit ihrer Hilfe wird zunächst folgendes Analogon zum Satze über die logarithmische Konvexität assoziierter Konvergenzradialen bewiesen: Ist  $f(z_1, \dots, z_n)$  analytisch in einer  $2n$ -dim. Umgebung  $\mathfrak{U}$  von  $-1 \leq x_k \leq +1$ ,  $k = 1, \dots, n$ , und enthält  $\mathfrak{U}$  die Zylinderbereiche

$$|z_k + (z_k^2 - 1)^{\frac{1}{2}}| < r'_k, \quad |z_k + (z_k^2 - 1)^{\frac{1}{2}}| < r''_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

so ist  $f$  auch analytisch in

$$|z_k + (z_k^2 - 1)^{\frac{1}{2}}| < r_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

wo die  $r_k$  den Gleichungen

$$\log r_k = \alpha \log r'_k + (1 - \alpha) \log r''_k \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

genügen. Diese Aussage wird dann noch wesentlich verallgemeinert. — So wird der Kontinuitätssatz bei diesem Beweise nicht benutzt. Behnke (Münster i. W.).

Nisigaki, Hisami: Über die durch hyperkomplexe Funktionen vermittelnden Abbildungen. Tôhoku Math. J. 44, 18—31 (1937).

In der vollständigen Matrixalgebra (mit der Basis  $E_{11}, E_{12}, \dots, E_{nn}$ ) über dem Körper der komplexen Zahlen heißt die Funktion  $Y = F(X) = \sum y_{ik} E_{ik}$  an der Stelle  $X_0 = \sum x_{ik} E_{ik}$  analytisch von der Klasse  $C_1$ , wenn die  $y_{ik} = \varphi_{ik}(x_{11}, \dots, x_{nn})$  analytische Funktionen der  $x_{ik}$  an der Stelle  $x_{ik}^0$  sind und für das Differential  $dY = U \cdot dX \cdot V$  gilt; dabei sollen die  $u_{\lambda\mu}$  und  $v_{\lambda\mu}$  der  $U$  und  $V$  [durch  $F(X)$  und  $X_0$  allein bestimmte] analytische Funktionen der  $x_{ik}$  sein. Sind  $U(X)$  und  $V(X)$  „im allgemeinen“ vom Range  $h$  bzw.  $k$ , so sagt man,  $Y = F(X)$  sei vom Typus  $(h, k)$ . Verf. beweist nun, daß jede in diesem Sinne in einem Bereiche  $\mathfrak{B}$  analytische, zur Klasse  $C_1$  gehörende Funktion vom Typus  $(n, n)$  — also eine Funktion, die insbesondere eindeutig abbildet — eine linear gebrochene Funktion in  $X$  ist. — Der Körper  $|\text{Det}(X)| < 1$  heißt Einheits- $d$ -Körper und  $\text{Det}(X) = 0$  seine Mittelfläche. Das Bild des Einheits- $d$ -Körpers bei Transformationen

$$Y = (AX + B)(CX + D)^{-1} \quad (1)$$

heißt schlechthin ein  $d$ -Körper. Die Transformationen (1) und nur diese sind mittelflächentreu  $d$ -Körperverwandtschaften. Behnke (Münster i. W.).

## Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Anwendungen.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik:

Lurquin, Constant: Sur la loi de Bernoulli à deux variables. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 23, 857—860 (1937).

L'auteur étudie la probabilité  $P(E_\alpha \bar{E}_\beta)$  que dans une suite d'épreuves indépendantes un événement  $E$  de probabilité  $p$  se produise  $\alpha$  fois avant que l'événement contraire  $\bar{E}$  se soit produit  $\beta$  fois. C'est là le problème des partis de Pascal; l'auteur retrouve quelques résultats classiques (voir par ex. Montmort, Essai d'analyse sur les jeux de hasard (1714), p. 232—248). Ville (Paris).

Borel, Émile: Sur les lois d'évolution probable des ensembles finis de segments. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 137—140 (1938).

Plaçons  $n - 1$  points  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  au hasard sur un segment dont la longueur sera prise pour l'unité; nous obtenons ainsi  $n$  segments inégaux. Le nombre moyen de segments dont la longueur est comprise entre  $x$  et  $x + dx$  est égal à  $n(n - 1)(1 - x)^{n-2} dx$ . Si  $nx = \lambda$  et si  $n$  est très grand, ce nombre est  $ne^{-\lambda} d\lambda$ . Les points  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  étant placés sur le segment unité supposons que l'on place un  $n^{\text{ième}}$  point  $A_n$ ; cette opération consiste à choisir le segment sur lequel  $A_n$  doit être placé et de placer ensuite  $A_n$  au hasard sur ce segment (nous dirons que nous



avons coupé ce dernier segment). Partons de  $n$  points donnés et répétons cette opération un grand nombre de fois; il y aura une loi d'évolution probable d'un ensemble fini de segments indépendants de somme égale à l'unité. On peut adopter diverses hypothèses sur le choix des segments que l'on coupe ou sur la manière de les couper. On obtient alors des formules relatives aux moyennes qui diffèrent de la formule donnée plus haut. Exemples: 1° Convenons de choisir toujours pour le couper celui des segments dont la longueur est la plus grande. La loi limite de l'évolution donnera la probabilité  $\frac{1}{2}n\lambda d\lambda$  pour  $\lambda \leq 2$  et zéro pour  $\lambda > 2$ . 2° Numérotions les segments au fur et à mesure qu'ils sont obtenus et supprimons le segment dont le numéro est le moins élevé. Dans ce cas le nombre de segments ne change pas et la longueur totale des segments tend vers zéro. 3° Au lieu de couper le plus grand segment en deux parties, coupons — le en trois parties en plaçant à son intérieur deux points au hasard. 4° Si en même temps que l'on coupe un segment quelconque on réunit toujours (ou de temps en temps) les deux plus petits, on arrive à la limite à des segments tous égaux entre eux. — Les problèmes les plus généraux conduiraient à des problèmes de probabilités en chaîne.

B. Hostinský (Brno).

Kermack, W. O., and A. G. McKendrick: Some properties of points arranged at random on a Möbius surface. *Math. Gaz.* 22, 66—72 (1938).

The authors note that a convenient model illustrating the occurrence of runs and gaps as considered in their previous papers, (1) (see this Zbl. 16, 413) and (2) (see this Zbl. 17, 272), is obtained by points pricked in succession through a strip of paper. Peaks are points either higher or lower than their immediate neighbors and runs of points occur between successive peaks. The cyclic arrangement considered in (2) is obtained simply by pasting the ends of the strip together forming a cylinder. In such a case the total number of runs  $r$  must be even. But the difference equation and generating function obtained for  $\bar{P}_{mr}$ , the total number of cyclic arrangements of  $m$  points which contain  $r$  runs, have values for  $r$  odd also. It is shown that these are the values appropriate if before the ends of the strip are fastened together one of them is turned through  $180^\circ$ , thus forming a Möbius band. The means of obtaining the numerical values are discussed and tables are also given for this case. C. C. Craig.

Eyraud, Henri: Sur certaines décompositions en aléatoires imaginaires. *C. R. Acad. Sci., Paris* 206, 723—725 (1938).

Let  $X$  be any random variable with its  $p$ -th semi-invariant  $\sigma_p$ . Let further  $\{x_k\}$  denote a sequence of random variables all following the same law, the  $n$ -th semi-invariant of which is  $\alpha_n \neq 0$ , for  $n = 1, 2, \dots$ . The problem considered is that of finding the real or complex constant coefficients  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , by which the variable, say  $\xi_m = \sum_{k=1}^m a_k x_k$ , has its first  $m$  semi-invariants equal respectively to  $\sigma_p$ . If, in particular, the law followed by  $x_k$  is that of Poisson, so that  $P\{x_k = n\} = (en!)^{-1}$ , and  $m = 4$ , then the coefficients  $a_k$  are roots of the equation

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 4 & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 \\ 0 & 3 & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 0 & 0 & 2 & \sigma_1 & \sigma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sigma_1 \end{vmatrix} = 0.$$

J. Neyman (London).

Mises, R. von: Note on deduced probability distributions. *Bull. Amer. Math. Soc.* 44, 81—83 (1938).

Verf. gibt eine vereinfachte Betrachtung zur Frage, weshalb bei den verschiedensten Zufallsspielen (es wird speziell das einfachste Modell des Roulettespieles betrachtet) immer eine nahezu gleichförmige Wahrscheinlichkeitsverteilung herauskommt (z. B. für die Endlagen des Rouletterades). Eine praktisch vorkommenden Verhältnissen an-



gepaßte numerische Rechnung ergibt eine etwas zu starke Abweichung von der Gleichförmigkeit (Beispiel: Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte Hälfte des Rouletterades zu treffen). Verf. schließt daraus, daß in Wirklichkeit noch andere Faktoren (neben der Radreibung) die Tendenz zur Gleichförmigkeit erhöhen müssen. Ref. bemerkt, daß hierbei die Art der Unterteilung in viele Sektoren in Frage kommt. Die Wahrscheinlichkeit für Rot kommt mit derselben Rechnung viel genauer heraus. Auch wurde bei der Rechnung nicht die Variation der Anfangslage berücksichtigt. *E. Hopf.*

**Doebelin, Wolfgang:** *Étude de l'ensemble de puissances d'une loi de probabilité.* C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 718—720 (1938).

In Fortführung der in dies. Zbl. 18, 75 ref. Note formuliert Verf. sieben weitere Sätze über die Potenzmenge einer Verteilungsfunktion  $F(x)$ . Im folgenden wird diese Menge mit  $E(F)$ , ihre Derivierte mit  $E'(F)$  bezeichnet. — I. Es sei  $D_n(a)$  die Dispersion von  $F_n(x)$ , d. h. die Länge des kleinsten abgeschlossenen Intervalls, in welchem  $F_n(x)$  um mindestens  $a$  zunimmt. Damit für jedes feste  $0 < b < a$  und  $n \rightarrow \infty$   $D_n(b)/D_n(a)$  gegen 0 strebt, ist notwendig und hinreichend, daß  $Pr\{|x| > 2X\}/Pr\{|x| > X\}$  gegen 1 strebt. II. Bekanntlich kann  $K(F_n)$  höchstens gegen die Klasse einer stabilen Verteilungsfunktion streben. Verf. findet hierfür eine einfache notwendige und hinreichende Bedingung; in jedem anderen Falle ist  $E'(F)$  entweder leer oder von der Mächtigkeit des Kontinuums. Einige weitere Sätze behandeln speziellere Verteilungsfunktionen, die in  $E'(F)$  enthalten sind. Ferner werden explizite Ausdrücke für solche  $F(x)$  angegeben, daß  $E'(F)$  sämtliche symmetrischen stabilen Verteilungsfunktionen bzw. sämtliche quasistabilen Funktionen enthält. Schließlich gelingt es auch für beliebiges festes  $a$  und  $n \rightarrow \infty$  einen asymptotischen Ausdruck für  $F_n(xD_n(a))$  anzugeben, wobei die im genannten Ref. zuletzt erwähnte unbeschränkt teilbare Verteilungsfunktion eine Rolle spielt. *W. Feller (Stockholm).*

**Doebelin, W.:** *Sur l'équation matricielle  $A^{(t+s)} = [A^{(t)}A^{(s)}]$  et ses applications aux probabilités en chaîne.* Bull. Sci. math., II. s. **62**, 21—32 (1938).

Es wird die allgemeine Form der bloß als meßbar vorausgesetzten Lösungen von  $a_{ik}(s+t) = \sum_{j=1}^r a_{ij}(s)a_{jk}(t)$  angegeben. Unter diesen sind bekanntlich diejenigen mit  $a_{ik}(t) \geq 0$  und  $a_{i1}(t) + \dots + a_{ir}(t) \equiv 1$  für die Wahrscheinlichkeitsrechnung von Bedeutung. Es wird gezeigt, daß diese für  $t > 0$  stets stetig sind und von der Form  $a_{ik}(t) = \sum \lambda_\rho^t P_{ik}^{(\rho)}(t)$ ; hierbei durchläuft  $\lambda_\rho$  die nichtverschwindenden Wurzeln der Säkulargleichung  $\|a_{ik}(1) - \lambda \delta_{ik}\| = 0$ , und  $P_{ik}^{(\rho)}(t)$  ist ein Polynom in  $t$ , dessen Grad die Vielfachheit von  $\lambda_\rho$  nicht übersteigt. Es sei bemerkt, daß hierbei  $\|a_{ik}\| \neq 0$  nicht vorausgesetzt wird. (Dieser Fall und mit differenzierbaren  $a_{ik}$  wurde bereits von Fréchet erledigt.) — Eingehende Untersuchung des Verhaltens der  $a_{ik}(t)$  insbesondere für  $t \rightarrow \infty$ . *W. Feller (Stockholm).*

**Onicescu, Octav:** *Sur la notion de chaîne et l'idée de loi naturelle.* Mathematica, Cluj **13**, 66—71 (1937).

**Salvemini, T.:** *Sui momenti di una variabile casuale somma di variabili dipendenti.* Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. **7**, 40—42 (1937).

● **Czuber, Emanuel:** *Die statistischen Forschungsmethoden.* 3., erw. Aufl. Hrsg. v. F. Burkhardt. Wien: L. W. Seidel & Sohn 1938. XVI, 330 S. RM. 12.—.

Dieses Buch könnte kurz als darstellende Statistik charakterisiert werden. Es beschäftigt sich fast ausschließlich mit der Frage, wie eine gegebene statistische Aufnahme (ein Kollektiv) zweckmäßig dargestellt und dessen verschiedene Eigenschaften durch Maßzahlen erfaßt werden können. So werden u. a. der Reihe nach eingeführt und ausführlich behandelt: Abhängigkeits- und Zufälligkeitskoeffizient, verschiedene Mittelwerte, Zentralwerte, Verhältniszahlen und Streuungsmaße, Korrelation und Regression. Alle diese Begriffe werden als „empirische“ eingeführt, während auf die Theorie der statistischen Hypothesen und der entsprechenden „theoretischen“ Maße



nicht eingegangen wird. Bloß im letzten Kapitel wird auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung Bezug genommen, allerdings bloß zur elementaren Herleitung der binomischen, Gaußschen, Poissonschen und Pólya-Eggenbergerschen Verteilungen. — Das Buch ist als erste Einführung gedacht und als solche besonders ausführlich geschrieben; besonderer Wert wird auf die Methoden der praktischen Berechnung gelegt. Kennzeichnend für das Buch ist die ungewöhnliche Fülle von praktischen (numerischen) Beispielen aus den verschiedensten Gebieten, vor allem aus der kameralistischen Praxis.

W. Feller (Stockholm).

**Haldane, J. B. S.:** The first six moments of  $\chi^2$  for an  $n$ -fold table with  $n$  degrees of freedom when some expectations are small. *Biometrika* 29, 389—391 (1938).

Let  $\{x_r\}$  be a sequence of independent random variables following the Poisson Law  $P\{x_r = k\} = e^{-m_r} m_r^k / k!$  for  $k = 0, 1, 2, \dots$ ;  $r = 1, 2, \dots, n$ . The author deduces expressions for the first six moments of the sum  $\chi^2 = \sum_{r=1}^n (x_r - m_r)^2 / m_r$ . The method

is based on the relations existing between the moments  $\mu_p$  and the semi-invariants  $\kappa_p$  and the paper contains two such equations which were not previously known, for  $p = 10$  and  $p = 12$ .

J. Neyman (London).

**Haldane, J. B. S.:** The approximate normalization of a class of frequency distributions. *Biometrika* 29, 392—404 (1938).

Consider a sample of  $n$  random observations and let  $x$  be a statistic derived from that sample. It is known that in certain cases, as  $n$  is indefinitely increased, the distribution of  $x$  tends to be normal. The process of approaching normality may be sometimes rather slow and the author considers means by which the difficulties involved in using the tables of the normal probability law could be avoided. The main results are summarized in the following two theorems: (a) If a variate  $x$  be so distributed that its first three semi-invariants  $k_1, k_2, k_3$ , tend to infinity with  $n$ , the fourth with  $n$  or more slowly, and in general  $k_r$  with  $n^{r-4}$  or more slowly; then the variate  $y = (x/k_1)^h$ , where  $h = 1 - k_1 k_3 / 3 k_2^2$  assumed to be different from zero, is so distributed that its third moment tends to zero with  $n^{-3}$ , and hence its  $\gamma_1$  tends to zero with  $n^{-3/2}$ . Here  $\gamma_1$  denotes the third moment of  $y$  measured in terms of its S.D. (b) If the variable  $x$  be so distributed that its semi-invariants  $k_2, k_3, k_4$  tend to infinity with  $n$  and no later semi-invariant  $k_r$  tends to infinity more rapidly than  $n^{r-4}$  then the variate  $z = \{1 + (x - k_1)/g\}^h$ , where  $g$  and  $h$  are certain functions of the first four semi-invariants specified by the author and assumed to be finite and different from zero, is so distributed that its third and fourth semi-invariants tend to zero with  $n^{-3}$  and  $n^{-4}$  respectively. The proof in both cases follows the same method. E.g. for theorem (a) the author writes  $x = k_1 + x'$  and considers  $y^r = (1 + x'/k_1)^{rh} = 1 + rh x'/k_1 + rh(rh - 1)x'^2/2! k_1^2 + \dots$ . Multiplying this expression by the elementary probability function of  $x$  and integrating from  $-\infty$  to  $+\infty$  he obtains the expression of the  $r$ -th moment of  $y$  as a series in terms of central moments of  $x$ . Then  $h$  is so adjusted as to reduce to zero the leading term of the third moment of  $y$ . The reviewer is doubtful about this method as the series integrated term by term is, for certain values of  $x$ , divergent.

J. Neyman (London).

**Segal, Irving E.:** Fiducial distribution of several parameters with application to a normal system. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 34, 41—47 (1938).

The author describes and discusses the general method of deriving the simultaneous fiducial distribution function of several independent parameters possessing a sufficient set of statistics. The method is applied and illustrated in deriving the fiducial distribution function of the parameters in the multivariate normal frequency law, which had hitherto only been given in the one and two variate cases.

C. C. Craig.

**Jeffreys, Harold:** Significance tests for continuous departures from suggested distributions of chance. *Proc. roy. Soc., Lond. A* 164, 307—315 (1938).

Consider a random variable  $x$ , the particular values of which may be given by

independent observations. Suppose that it is known for certain that the elementary probability law of  $x$  is given by  $p(x) = f(x) + ag(x)$  where  $f$  and  $g$  are known functions while the value of  $a$  is known only to be contained a certain range  $c$ . The author deduces a test of the hypothesis that  $a = 0$ . This is based on the assumption that  $a$  itself is a random variable with a uniform a priori distribution over the range  $c$  and on an approximate formula for its a posteriori distribution. *J. Neyman.*

**Jeffreys, Harold:** The correction of frequencies for a known standard error of observation. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 98, 190—194 (1938).

Denote by  $v(m)$  the elementary distribution of chance that the true value of a character of a star will fall with an infinitesimal range round  $m$ . Let further  $u(m)$  represent the elementary distribution of chance that an observation of the character considered, affected by a random error following a normal law, will fall within the same range. Eddington gave a formula permitting the calculation of  $v(m)$  from  $u(m)$  and from the known standard error of observations. The author calls attention to the fact that the distribution of actual observations should not be interpreted as giving directly  $u(m)$ . The application of Eddington's formula requires a preliminary estimation of  $u(m)$ . *J. Neyman (London).*

**Dumas, M.:** Note sur les séries de mesures appartenant à une loi de Gauss. Présumptions permises et interprétation des résultats. *Mém. Artillerie franç.* 16, 599—701 (1937).

The author considers the Gaussian probability laws in the form  $h\pi^{-\frac{1}{2}} e^{-h^2(x-\alpha)^2}$  and assumes that series of observations of values of one or more variables,  $x$ , following such laws are made. These measurements are to be used to test various hypotheses concerning the parameters  $\alpha$  and  $h$ . The tests are based on a posteriori distributions of the parameters, deduced on the assumptions (a) that all real values of  $\alpha$  are a priori equally probable and (b) that the a priori distribution of  $h$  is given by  $\text{const} \times h^{-1}$ . Some of the results resemble those recently published by H. Jeffreys (this Zbl. 16, 412).

*J. Neyman (London).*

**Bartlett, M. S.:** Further aspects of the theory of multiple regression. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 34, 33—40 (1938).

This is a continuance of a previous paper of the author (see this Zbl. 10, 71) in which problems in the theory and application of linear multiple regression are dealt with by vector methods. In particular, results of Hotelling on his "most predictable criterion" and on the resolution into principal components, and those of Fisher on linear discriminant functions are deduced and discussed in vector form. The  $\chi^2$  approximation for the  $\Lambda$  test (loc. cit.) is further discussed. *C. C. Craig.*

**Dwyer, Paul S.:** The simultaneous computation of groups of regression equations and associated multiple correlation coefficients. *Ann. math. Statist.* 8, 224—231 (1937).

Bemerkungen über die Berechnung der Regressionskoeffizienten, partiellen Korrelationskoeffizienten und multiplen Korrelationskoeffizienten bei Korrelationssystemen und Vergleichung von verschiedenen Berechnungsmethoden. *W. Simonsen.*

### **Physikalische Statistik:**

**Kármán, Theodore de, and Leslie Howarth:** On the statistical theory of isotropic turbulence. *Proc. roy. Soc., Lond. A* 164, 192—215 (1938).

Es handelt sich um Strömungen der Eigenschaft, daß der zeitliche Mittelwert jeder Funktion der Geschwindigkeitskomponenten und ihrer ersten Ableitungen, die in einem bestimmten Punkt und bezüglich eines bestimmten Koordinatensystems definiert ist, unverändert bleibt, wenn die Achsen beliebig rotiert oder gespiegelt werden. Im übrigen wird angenommen, daß die Veränderung der Mittelwerte vernachlässigt werden darf. Sind  $u_i$  bzw.  $u'_i$  die Geschwindigkeitskomponenten in  $P$  bzw.  $P'$ , so wird gezeigt, daß die Matrix  $(u_i u'_j)$  der Mittelwerte der Korrelations-



koeffizienten einen Tensor bildet. Dadurch wird die Berechnung von Funktionen der Geschwindigkeitsableitungen wesentlich erleichtert. Weiter erhalten die Verff. eine partielle Differentialgleichung für die Korrelationsausbreitung, aus welcher dann verschiedene hydrodynamische Folgerungen gezogen werden. *W. Feller* (Stockholm).

**Kramers, H. A.: Didaktisches zur Verwendung der grand Ensembles in der Statistik.** Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 41, 10—24 (1938).

Ein Gibbssches „grand ensemble“ ist eine Gesamtheit von Systemen, die nicht nur in bezug auf die Energie  $\varepsilon$ , sondern auch in bezug auf die Anzahl  $\nu_i$  der Teilchen jeder vorhandenen Sorte  $i$  verschieden sein können. Ein grand ensemble ist kanonisch,

wenn seine Dichte im Phasenraum durch die Funktion  $\varrho = \frac{1}{\prod_i \nu_i!} e^{\frac{-\Omega + \sum \nu_i \xi_i - \varepsilon}{\theta}}$  dar-

gestellt wird, worin  $\theta$  und  $\xi_i$  Konstanten sind und  $\Omega$  eine Funktion von  $\theta$ ,  $\xi_i$  und den in  $\varepsilon$  eingehenden äußeren Parametern (z. B. dem Volumen  $V$ ). Bei formaler Komposition zweier solcher Gesamtheiten entsteht wieder eine Gesamtheit der gleichen Art, wenn die Größen  $\theta$  und  $\xi_i$  für beide Gesamtheiten die gleichen Werte haben.  $\theta$  hat die Bedeutung einer Temperatur ( $\theta = kT$ ) und  $\xi_i$  sind die partiellen freien Energien der einzelnen Teilchensorten; die freie Energie des Gesamtsystems ist  $F = -\Omega + \sum \nu_i \xi_i$ .

Für ein homogenes System gilt  $\Omega = V \cdot p(\xi_i, \theta)$ , wobei  $p$  die Bedeutung eines Druckes hat. Als Beispiel für die Anwendung der grand ensembles in der klassischen Statistik wird das ideale Gas behandelt. Die grand ensembles lassen sich auch mit Vorteil in der Quantenstatistik verwenden, wobei statt der stetigen Energiefunktion die Reihe der Energieeigenwerte  $\varepsilon_n$  eingeführt werden muß.  $\varrho$  erscheint dann in der Form einer Matrix,

die im Falle einer kanonischen Gesamtheit die Gestalt  $\varrho(\nu_i, n) = h^3 \sum e^{\frac{-\Omega + \sum \nu_i \xi_i - \varepsilon_n}{\theta}}$  annimmt. Als Spezialfälle werden Gase aus gleichartigen Teilchen behandelt, die entweder der Fermi- oder der Bosestatistik gehorchen. *Fürth* (Prag).

### Versicherungsmathematik und verwandte Anwendungen:

**Dreyer, Hans:** Über die Berechnung der unvollständigen Gammafunktion und ihre Anwendung im Versicherungswesen. Bern: Diss. 1936. 60 S.

Nach einer Zusammenfassung der Ergebnisse verschiedener Untersuchungen anderer Forscher legt sich Dreyer die Frage vor, inwieweit vorhandene Tabellen der unvollständigen Gammafunktion für versicherungstechnische Zwecke verwendbar sind. Es zeigt sich, daß besonders die Tabellen von W. Thalmann (Zahlwerte der Prymschen Funktion zur Berechnung von Rentenbarwerten. Mitt. Vereinig. Schweiz. Versich.-Math. H. 26) in Frage kommen. Bei ihrer Verwendung erweist sich eine bestimmte Form zweidimensionaler Interpolation und die Heranziehung von Hilfstabellen, die von D. zwar berechnet, aber wegen ihrer Umfänglichkeit der Arbeit nicht beigegeben wurden, als notwendig. Zahlreiche Beispiele, die die Brauchbarkeit der Methode zeigen, beschließen die Untersuchung. *F. Knoll* (Wien).

**Frantíková, J.:** The problem of interest for life-annuities and endowment assurance policy values. Publ. Fac. Sci. Univ. Charles Prague Nr 154, 11—14 (1937) [Tschechisch].

The solution of the problem of interest, that means to count the values of insurance-mathematic at a new rate of interest without counting new commutation columns, is given for practical purposes quite sufficiently in the formula of Poukka and the first formula of Güttinger. If we suppose Poukka's constant, by the second formula of Güttinger we arrive at the exact solution. — I derive another approximative formula, which does not use the constant of Poukka

$$\begin{aligned} \bar{a}'_x &= \bar{a}_x(1 - \Delta n_1 + \Delta^2 n_1 n_2), \\ \text{where } n_1 &= \bar{a}_x + n_1, \quad n_2 = 2\bar{a}_x + n_2, \quad \Delta = \delta_1 - \delta. \end{aligned}$$

For the endowment policy values I get the following approximative formula:

$${}_rV'_{x\overline{n}} = {}_rV_{x\overline{n}} + \Delta \frac{a_{x+r, \overline{n-r}}}{a_{x\overline{n}}} \left\{ (n_1 - k_1) + \Delta \left( \frac{n_1 n_2}{2} - n_1 k_1 + \frac{k_1 k_2}{2} \right) \right\},$$

where

$$\begin{aligned} n_1 &= a_{x+r} + n_1, & n_2 &= 2a_{x+r} + n_1, \\ k_1 &= a_x + k_1, & k_2 &= 2a_x + k_1. \end{aligned}$$

The errors of this formula are no greater than 1% for the 1% difference of the rate of the interest.

*Autoreferat.*

**Koeppler, H.:** Risoluzione di un'equazione della riserva matematica prospettiva. Giorn. Ist. Ital. Attuari 8, 341—349 (1937).

Für den bereits in früheren Arbeiten des Verf. (vgl. dies. Zbl. 17, 176) behandelten sehr allgemeinen Typus von Versicherungen mit mehrfachen Ausscheideursachen und von der Zeit abhängigem Verzinsungsgesetz wird im diskontinuierlichen Bereiche die Gleichung der prospektiv erklärten Prämienreserve aufgestellt und gelöst. *Birnbaum.*

**Natale, E.:** Die logistische Kurve der zahlenmäßigen Entwicklung der menschlichen Bevölkerung. An. Soc. Ci. Argent. 124, 275—278 (1937) [Spanisch].

**Kostitzin, V. A.:** Sur les coefficients mendéliens d'hérédité. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 883—885 (1938).

Étude, dans le cas mendélien de symétrie, des coefficients d'hérédité intervenant dans les équations différentielles de la sélection naturelle (v. ce Zbl. 18, 77). Caractérisation symbolique de la structure cellulaire, des divisions de maturation et combinaisons ultérieures.

*Brelot (Bordeaux).*

**Mittmann, Otfried:** Über die Schnelligkeit der Ausmerze von Erbkrankheiten durch Sterilisation. Deutsche Math. 2, 709—721 (1937).

The author examines mathematically the consequences of a program of sterilization designed to reduce the prevalence of a given disease. The general case involving as it may recessive characteristics, and random mating with gradual change in the structure of the population, leads to non-integrable difference equations. The author offers methods of successive approximation which serve to solve certain problems in this field. In particular the methods are applied to solving the following illustrative problem. Assume a population with a 3% probability of a given disease among its members. Assume that 75% of these diseased are systematically prevented from propagation, while the remaining mate at random among themselves or with the well, and have a normal rate of propagation. Assuming the disease to be semidominant, in how many generations should the prevalence of the disease be reduced to one hundredth of its original percentage? The author finds the answer to lie between 9,71 and 9,90 generations — less than 10 generations.

*Albert A. Bennett.*

**Davis, H. T.:** Mathematical adventures in social science. Amer. Math. Monthly 45, 93—104 (1938).

Bericht über die mathematischen Methoden der Nationalökonomie. An neuen Gesichtspunkten ist eine Analogie zwischen thermodynamischen Begriffsbildungen und Schlußweisen einerseits und gewissen ökonomischen andererseits zu erwähnen.

*W. Fenchel (Kopenhagen).*

**Moulton, E. J.:** Concerning a conjecture in the preceding paper. Amer. Math. Monthly 45, 105—106 (1938).

In der vorstehend ref. Arbeit wird als Erfahrungstatsache erwähnt, daß eine Zeitreihe  $x(t)$  durch fortgesetzte Anwendung der Mittelwertbildung

$$M(x) = \int_0^t x(s) ds - \frac{1}{L} \int_0^L (L-s)x(s) ds, \quad L = \text{konst.}$$

im Limes  $\Delta \cos 2\alpha(t+a)/L$  ergibt. Verf. zeigt, daß dies im allgemeinen falsch ist. Nach Ansicht des Ref. hat er jedoch die Behauptung mißverstanden, indem Davis wohl gemeint hat, daß die Variable nach jedem Schritt neu zu normieren ist. *Feller.*



**Dresch, F. W.:** Index numbers and the general economic equilibrium. Bull. Amer. Math. Soc. 44, 134—141 (1938).

Verf. untersucht mittels Preis- und Produktionsindizes, die den von F. Divisia (Economie rationnelle, p. 268, Paris 1928) eingeführten analog sind, die Zustände eines ökonomischen Systems erstens unter Voraussetzung von freier Konkurrenz und dann unter Voraussetzung von Beschränkungen wie Monopolismus und eingeschränkter Konkurrenz. Zum Abschluß wird eine Behandlung des Zinsproblems gegeben.

W. Simonsen (Kopenhagen).

## Numerische und graphische Methoden.

**Wilson, N. R.:** Geometric formulation of difference formulae. Trans. Roy. Soc. Canada, III. s. 31, 83—93 (1937).

Es wird gezeigt, wie man die Koeffizienten von Interpolationsformeln aus dem Differenzschema gewinnen kann.

Rehbock (Bonn).

**Bateman, Harry:** Halley's methods for solving equations. Amer. Math. Monthly 45, 11—17 (1938).

Verf. gibt einen ausführlichen historischen Bericht über die von de Lagny und Halley gefundenen Näherungsausdrücke für Wurzeln der Form  $(a^n + b)^{\frac{1}{n}}$  ( $n > 0$ ,  $b$  klein im Vergleich zu  $a$ ) [Lagny, Méthodes nouvelles et abrégées pour l'extraction et l'approximation des racines, Paris 1692; Halley, A new and general method of finding the roots of equations; Philos. Trans. 18 (1694)]. Diese Näherungen, die auch Newton bekannt waren, sind in der Folgezeit in verschiedenster Form immer wieder gefunden und auf allgem. algebraische Gleichungen verallgemeinert worden. Ihr Zusammenhang mit den Newtonschen Ergebnissen wird erörtert, neuere Konvergenzuntersuchungen werden skizziert.

Rehbock (Bonn).

**Stankiewicz, L.:** Sur les méthodes de Cesari et Kaczmarz relatives à la résolution de systèmes d'équations linéaires à l'aide d'approximations successives. Bull. int. Acad. Polon. Sci. A 1937, 521—529.

Cesari (s. dies. Zbl. 17, 79) leitet einen allgemeinen Algorithmus zur sukzessiven Approximation der Lösung des linearen Gleichungssystems  $A \cdot X = L$  ab, indem er diese Matrizengleichung mit einer willkürlichen Konstanten  $c$  erweitert und die Matrix  $cA$  zerlegt in  $cA = B + C$ , wobei die Matrizen  $B$  und  $C$  noch gewisse Bedingungen erfüllen müssen. Fr. Stankiewicz treibt die Verallgemeinerung noch einen Schritt weiter, indem sie die Konstante  $c$  durch eine willkürliche Matrix ersetzt. In dieser Form umfaßt der Algorithmus von Cesari auch das (ein wenig modifizierte) Approximationsverfahren von Kaczmarz als Spezialfall.

S. Gradstein (Oisterwijk).

**Meyer zur Capellen, W.:** Instrumente zum Integrieren. Z. Instrumentenkde 58, 93—99 (1938).

In Tabellenform wird eine Übersicht über Integriergeräte gegeben. Ausgehend vom gewöhnlichen Planimeter, Integrimeter und Integraphen gibt der Verf. in systematischer Anordnung die Fortentwicklungen zur Bestimmung von Momenten, Stieltjesintegralen usw. an. Die Geräte zur Auflösung von Differentialgleichungen werden gestreift.

Theodor Zech (Darmstadt).

**Airey, John R.:** The radiation integrals  $\int_x^\infty \frac{dx}{x^a(e^x - 1)}$ . Philos. Mag., VII. s. 25, 273—282 (1938).

After some preliminary remarks on the above integral for  $a = 1$ , the author proceeds to discuss the cases  $a = -3 - m$ , with  $m$  equal to  $-3, -4, -5, -3,25, -3,5, -3,75$ . Whereas some of these cases are elementary, series developments including asymptotic series are given for the other cases. Examples illustrate the application of these expressions. A table is given for the value of the integral if  $a$

is equal to 0,1 and 2 and for  $x$  from 0,0 to 10,0 in steps of 0,1. A similar table is included for  $a = 0,5, 0,25$  and  $0,75$ . *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

**McDougall, J., and Edmund C. Stoner:** The computation of Fermi-Dirac functions. *Philos. Trans. Roy. Soc. London A* **237**, 67—104 (1938).

In Rechnungen über statistische Systeme mit Fermi-Diracscher Statistik treten häufig Integrale der Form

$$F_k(\eta) = \int_0^{\infty} \frac{x^k dx}{e^{x-\eta} + 1} \quad k = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$$

auf. Die Verf. geben eine Tafel der Funktionen  $\frac{2}{3}F_{3/2}$ ,  $F_{1/2}$  und der drei ersten Ableitungen von  $F_{1/2}$  zwischen  $\eta = -4$  und  $\eta = +20$  in Schritten 0,1; bei  $\frac{2}{3}F_{3/2}$  und  $F_{1/2}$  sind 6 bis 5 Stellen hinter den Einern angegeben.  $F_{1/2}$  ist für die von  $\eta = 8$  entfernter liegenden Werte mit Reihen berechnet, für die näher liegenden mit numerischer Integration (für  $\eta < -4$  und  $\eta > +20$  konvergieren dann die Reihen sehr gut).  $\frac{2}{3}F_{3/2}$  ist dann durch numerische Integration  $\left(\frac{d}{d\eta} \left(\frac{2}{3}F_{3/2}\right) = F_{1/2}\right)$ , die übrigen Funktionen durch Differentiation gewonnen worden. *F. Hund* (Leipzig).

**Wünsche, Günther:** Grundzüge einer allgemeinen nomographischen Methode der Versicherungsmathematik. Ein Beitrag zur Frage der nomographischen Deutung versicherungsmathematischer Zusammenhänge. *Bl. Versich.-Math.* **4**, 209—220 (1938).

Behandelt wird eine sich bis zum Endalter  $z$  erstreckende Kapitalversicherung. Dem Eintrittsalter  $x$  entspreche ein Netto-Einmalbetrag  $\mathfrak{A}(x, z)$ .  $V(w - x)$  sei das beim Alter  $w$  ermittelte Netto-Deckungskapital,  $P$  sei die bis zum Alter  $y$  in gleichbleibender Höhe zu entrichtende Netto-Jahresprämie,  $a(w, y)$  der Barwert der vom Alter  $w$  bis zum Alter  $y$  laufenden vorschüssigen Leibrente vom jährlichen Betrage 1. Dann ist a)  $V(w - x) = \mathfrak{A}(w, z) - Pa(w, y)$  für  $x \leq w \leq y$ , b)  $V(w - x) = \mathfrak{A}(w, z)$  für  $y \leq w \leq z$ . Diese Beziehungen werden so umgeformt, daß eine nomographische Darstellung, die Verf. als die „Methode der Zustandspunkte“ bezeichnet, möglich wird. Sie ist auch auf Versicherungen mehrerer verbundener Leben und vor allem auf die analogen Beziehungen der Invaliditäts- und Pensionsversicherung anwendbar.

*Rehbock* (Bonn).

## Geometrie.

**Irmer, Alfred:** Axiomatische Untersuchungen über die Richtung und die Anordnung der Punkte auf der Geraden. Marburg: Diss. 1937. 68 S.

Als „Hauptsatz der linearen Anordnung“ (der in 3 Fassungen gebracht wird) ist die Tatsache bezeichnet, daß die Punkte einer Geraden sich auf genau zwei (inverse) Weisen einer Ordnungsbeziehung  $<$  unterwerfen lassen, wobei „ $A < B < C$ “ mit „ $B$  zwischen  $A$  und  $C$ “ äquivalent ist. In den neueren Auflagen von Hilberts „Grundlagen der Geometrie“ ist nicht mehr eine lineare Axiomengruppe abgesondert, die diesen Satz nach sich zieht. Irmer untersucht, welche Axiomensysteme, die aus den Hilbertschen linearen Anordnungsaxiomen (6. Aufl.) durch Zufügung von in bestimmter Weise ausgewählten Implikationsaussagen über die Zwischenlage von 4 Punkten entstehen, den Hauptsatz nach sich ziehen. (Über die einschlägigen Arbeiten von Huntington u. s. versch. Mitarbeitern geht diese Zielsetzung gemäß einer Bemerkung des Autors durch Einbeziehung des Hilbertschen Existenzaxioms der linearen Anordnung hinaus.) Es schälen sich fünf solcher in sich unabhängigen Axiomensysteme heraus. — Ein weiterer Teil der Arbeit ist der anschließenden Hilbertschen Aufgabe (a. a. O.) gewidmet, ein solches, mit dem System der Hilbertschen linearen und ebenen Verknüpfungs- und Anordnungsaxiome äquivalentes „System von unabhängigen Axiomen aufzustellen, daß die auf die Anordnung der Punkte einer Geraden bezüglichen Axiome diese Anordnung vollständig beschreiben“. Dabei wird in das lineare Teilsystem, dessen Existenzforderungen möglichst eingeschränkt sind, der Mooresche Vierpunkte-



satz einbezogen; die Unabhängigkeit der Axiome wird durch eine Aufspaltung des Pasch-Axioms in zwei geeignete Teile (deren einer an eine Existenzbedingung gebunden ist) erreicht. — Ein Anhang behandelt eine Erweiterung des Hauptsatzes der linearen Anordnung auf parallele Geraden. *Arnold Schmidt* (Marburg, Lahn).

**Woude, W. van der:** On certain linear constructions and a well-known configuration. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc., 41, 117—119 (1938).

In der konstruktiven Geometrie werden häufig für lineare Probleme Lösungen gegeben, die sich konstruktiver Hilfsmittel zweiter Ordnung bedienen. Verf. gibt für zwei Fälle, die in den Grundlagen der Geometrie eine Rolle spielen (s. H. F. Baker, Principles of Geometry IV, Cambridge 1925), lineare Lösungen. — 1. Die erste Aufgabe bezieht sich auf die Konstruktion der Nullebene eines beliebigen Punktes in einem Nullsystem. — 2. Die zweite Aufgabe führt auf die Realisierung der Konfiguration  $(15_3; 15_3)$  in einem  $R_3$ , während Baker dieselbe nur in einem  $R_4$  vornehmen kann. Es seien  $s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}$  Raumgeraden und  $N$  ein beliebiger Punkt. Die vier  $s_{ik}$  definieren eine lineare Kongruenz. Wie konstruiert man linear den Kongruenzstrahl durch  $N$ ? *Steck* (München).

**Cavallaro, Vincenzo G.:** Sur l'emploi des côtés de polygones réguliers dans l'évaluation approchée des racines de certaines équations transcendentes. Mathesis 52, 83—88 (1938).

**Noguera, Rodrigo:** Einiges über pythagoreische Dreiecke. Bol. mat. 10, 58—62, 81—89, 105—115, 145—150 u. 179—187 (1937) [Spanisch].

**Abason, Ernest:** Propriétés des triangles au même centre de gravité. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 8, 97—105 (1937).

**Egerváry, Eugen:** Über ein Minimumproblem der Elementargeometrie. J. reine angew. Math. 178, 174—186 (1938).

Verf. zeigt, daß mehrere Minimumsätze der Dreiecksgeometrie spezielle Fälle des folgenden Problems sind: Gegeben sind das Dreieck  $A_1A_2A_3$  und die positiven Gewichte  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ; sind  $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$  die Entfernungen eines Punktes  $P$  von den Ecken  $A_1, A_2, A_3$ , so ist derjenige Punkt  $P$  zu bestimmen, für welchen  $\sqrt[n]{\lambda_1\varrho_1^n + \lambda_2\varrho_2^n + \lambda_3\varrho_3^n}$  ein Minimum wird. Hierbei ist  $n$  ein beliebiger positiver ganzzahliger Exponent; auch der Fall  $n \rightarrow \infty$  wird betrachtet. Verf. zeigt, daß das Problem (und das entsprechende für den Raum) eine einzige Lösung hat, und weist darauf hin, daß die Einzigkeit dem Umstande zu verdanken ist, daß die zu einem Minimum zu machenden Funktionen konvex sind. Die Fälle  $n = 1, n = 2, n = 4$  werden ausführlich untersucht; in diesen Fällen wird  $P_M$  auch wirklich bestimmt. Durch die Beziehung zwischen den Zahlen  $\varrho_i$  und den Seiten des Fußpunktdreiecks von  $P$  ist der Verf. imstande, auch Minimumfragen für Indreiecke (bzw. Intetraeder) zu lösen. Er erhält dabei auch neue Resultate, bestimmt z. B. das Minimum der Quadratsumme der Seiten und das Minimum der größten Seite der Indreiecke, das Minimum der Kantenquadratsumme der Intetraeder usw. Von Bedeutung ist noch eine Bemerkung über den Punkt kleinster Entfernungssumme beim Tetraeder ( $n = 1, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ ); dieser Punkt ist das isogonale Bild desjenigen Punktes, welcher ein gleichflächiges Fußpunktstetraeder hat, und kann — in Widerspruch zu einer Behauptung von R. Sturm — als Schnittpunkt von drei Flächen zweiter Ordnung bestimmt werden. *O. Bottema* (Deventer).

**Zacharias, Max:** Über den Zusammenhang des Morleyschen Satzes von den winkeltätelnden Eckenlinien eines Dreiecks mit den trilinearen Verwandtschaften im Dreieck und mit einer Konfiguration  $(12_4; 16_3)$  der Dreiecksgeometrie. Deutsche Math. 3, 36—45 (1938).

In dem Dreieck  $A_1A_2A_3$  sind  $x_i$  und  $y_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) die den Winkel  $A_i$  drittelnden Eckenlinien,  $(y_2 x_3) = B_1$  usw.;  $(x_2 y_3) = C_1$  usw. Den Morleyschen Satz („das Dreieck  $B_1B_2B_3$  ist gleichseitig“) kann man durch einfache Winkelberechnungen herleiten aus dem Hilfssatz: Die drei Geraden  $B_iC_i$  schneiden sich in einem Punkt  $O$ .

Chiocas hat bewiesen, daß dieser Hilfssatz nicht nur für die drittelnden Eckenlinien gilt, sondern auch für drei Paare isogonaler Eckenlinien. Verf. gibt nun einen sehr einfachen Beweis des Hilfssatzes; er zeigt außerdem, daß dieser gilt unter der noch allgemeineren Voraussetzung, daß die Eckenlinien zwei „reziproke Tripel“ bilden, und ordnet so den Morleyschen Satz in die Theorie der trilinearen Verwandtschaften ein. [Vgl. Zacharias, Deutsche Math. 1, 174—181 (1936); dies. Zbl. 13, 410]. Ferner wird gezeigt, daß die Geraden  $A_i B_i$  durch einen Punkt  $O$ ,  $A_i C_i$  durch einen Punkt  $Q$  gehen, daß  $O$ ,  $P$  und  $Q$  in einer Geraden liegen und mit  $A_i$ ,  $B_i$  und  $C_i$  eine Konfiguration  $(12_4, 16_3)$  bilden. Untersucht wird, unter welchen Voraussetzungen über die Eckenlinien  $x_i, y_i$  das Sechseck  $B_1 C_3 B_2 C_1 B_3 C_2$  gewisse Eigenschaften hat. Zum Schluß werden zwei Umkehrungen des Morleyschen Satzes bewiesen. *O. Bottema.*

**Rozet, O.: Sur les surfaces topographiques.** Bull. Sci. math., II. s. 62, 50—64 (1938).

Hauptsächlich im Anschluß an die Literatur von 1850—1880 werden die Definitionen und Bestimmungsgleichungen der topographisch bedeutsamen Flächenkurven durchdiskutiert: Kurven maximaler Steigung, Ort der extremen Krümmungen der Höhenlinien, Talwege, hydrodynamische Kurven. *W. Feller (Stockholm).*

**Markič, Michel: Transformantes. Nouveau véhicule mathématique. Synthèse des triquaternions de Combebiac et du système géométrique de Grassmann. Calcul des quadri-quaternions.** Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, IV. s. 1, 201—248 (1937).

In Fortsetzung des ersten Teils derselben Arbeit (vgl. dies. Zbl. 16, 369) werden hier einige weitere Ausführungen über das vom Verf. dort eingeführte System der Quadriquaternionen gemacht. Es wird untersucht, in welcher Weise das System der Hamiltonschen Quaternionen und das der im Jahre 1902 von Combébiac eingeführten Triquaternionen darin enthalten ist. Die gleiche Untersuchung wird für das Grassmannsche System der Ausdehnungslehre gemacht. Der Kalkül wird dann zur Lösung einer Reihe einfacher geometrischer Aufgaben, wie Senkrechtenkonstruktion u. ä., verwandt. Zum Schluß findet sich ein Hinweis auf die weitgehende Brauchbarkeit der vom Verf. eingeführten „transformantes“ auf anderen Gebieten, sogar der mathematischen Logik. *Bureau (Hamburg).*

### Analytische und algebraische Geometrie:

**Goormaghtigh, R.: Sur les coniques osculatrices aux paraboles d'indice quelconque et à la spirale logarithmique.** Mathesis 52, 79—82 (1938).

**Spyropoulos, Georg: Darstellungen  $N$ -dimensionaler projektiver Räume in  $(2N+1)$  dimensionalen projektiven Räumen.** Bull. Soc. Math. Grèce 18, 50—62 (1938).

In Analogie zu der klassischen Untersuchung von Segre über die Geometrie der  $R_2$  im  $R_5$  wird hier eine Reihe von Sätzen über die gegenseitige Lage linear abhängiger  $R_n$  im  $R_{2n+1}$  oder bereits im  $R_{2n}$  oder  $R_{2n-1}$  hergeleitet. Linear abhängig heißen hierbei solche  $R_n$ , zwischen deren Grassmannkoordinaten eine lineare Beziehung besteht. Wesentlich ist hierbei stets der Satz, daß ein Raum, der  $k-1$  von  $k$  linear abhängigen  $R_n$  schneidet, auch den letzten trifft. *Bureau (Hamburg).*

**Guareschi, Giacinto: Alcuni fondamenti di geometria analitica degli spazi lineari superiori.** Atti Ist. Veneto Sci. etc. 95, 369—402 (1936).

Die Arbeit beginnt mit einigen einfachen Betrachtungen über die Orientierung von linearen Räumen. Als Richtungskosinus zweier  $R_p$  wird dann der Quotient der Volumina des einen Raumes und seiner Orthogonalprojektion auf den andern eingeführt, beide in einer bestimmten Orientierung genommen. Mit Hilfe des Richtungskosinus eines  $R_p$  mit den  $\binom{n}{p}$  Koordinaten- $R_p$  wird dann eine Parameterdarstellung dieses  $R_p$  erhalten, die sich als Verallgemeinerung der bekannten Parameterdarstellung der Geraden erweist. Weiterhin befinden sich einige Betrachtungen über die Matrizen



aus diesen Richtungskosinus eines  $R_p$  mit allen Koordinaten- $R_p$  sowie die Herleitung eines allgemeinen Ausdrucks für die Richtungskosinus zweier  $R_p$ , vermittelt der Richtungskosinus mit den Koordinaten- $R_p$ .  
*Burau (Hamburg).*

**Strubecker, Karl:** Beiträge zur Geometrie des isotropen Raumes. J. reine angew. Math. 178, 135—173 (1938).

Zur Realisierung eines isotropen dreidimensionalen Raumes  $I_3$  bevorzugt Verf. einen pseudoeuklidischen vierdimensionalen Raum  $R_4$ . Seine absolute Maßfläche  $\Phi_3^2$  trägt zwei Scharen reeller oder konjugiert-komplexer Erzeugender. Jeder Tangentialraum dieser  $\Phi_3^2$  stellt einen isotropen  $I_3$  dar, dessen absoluter Kegelschnitt also aus einem Paar reeller oder konjugiert-komplexer Geraden  $(e_1, e_2)$  besteht. Der Schnittpunkt  $O$  von  $(e_1, e_2)$  heißt absoluter Punkt, Treffgeraden von  $e_1(e_2)$  heißen isotrop von erster (zweiter) Art, Gerade durch  $O$  vollisotrop, dagegen Ebenen durch  $O$  isotrop, solche durch  $e_1(e_2)$  vollisotrop von erster (zweiter) Art. — Die projektiven Automorphismen des absoluten Geradenpaares bilden die achtegliedrige Hauptgruppe  $\mathfrak{G}_8$ , die sog. Ähnlichkeiten des  $I_3$ . Bemerkenswerte invariante Untergruppen von  $\mathfrak{G}_8$  sind:  $G_7$ , die Grenzgruppe der Ähnlichkeiten des  $I_3$  (sie läßt jeden uneigentlichen Strahl durch  $O$  fest);  $\mathfrak{B}_7$ , die volumstreuen Ähnlichkeiten;  $G_6$ , die volumstreuen Ähnlichkeiten der Grenzgruppe;  $\mathfrak{B}_7$ , die modularen (nichtvolumstreuen!) Bewegungen des isotropen Raumes;  $B_6$ , die modularen Bewegungen der Grenzgruppe;  $\mathfrak{B}_6$ , die volumstreuen Bewegungen;  $G_5$ , die volumstreuen Grenzbewegungen. — Zwei eigentliche Punkte des isotropen Raumes besitzen erst im Rahmen der Grenzgruppe  $G_5$  eine Invariante. Die weitere Untersuchung beschränkt sich daher auf das Studium von  $G_5$ . Verf. bestimmt sämtliche Invarianten gegenüber  $G_5$ , wobei — begründet in der selbstdualen Struktur des absoluten Geradenpaares — eine bemerkenswerte Dualität der Metrik des isotropen Raumes in Erscheinung tritt. — Die Gruppe  $G_5$  gestattet die folgenden beiden Darstellungen:

$$G_5 = D_3^r \cdot D_3^l = D_3^l \cdot D_3^r, \quad G_5 = S_3^r \cdot S_3^l = S_3^l \cdot S_3^r,$$

erstens als kommutatives Produkt der Gruppen  $D_3^r$  der Rechtsdrehungen bzw.  $D_3^l$  der Linksdrehungen (mit den vollisotropen Schiebungen als gemeinsame eingliedrige invariante Untergruppe), zweitens als kommutatives Produkt der Gruppen  $S_3^r$  der Rechtschiebungen bzw.  $S_3^l$  der Linksschiebungen (mit derselben gemeinsamen eingliedrigen invarianten Untergruppe der vollisotropen Schiebungen). Weitere zahlreiche Ergebnisse fließen jetzt aus der Untersuchung eingliedriger Untergruppen von  $D_3^r, D_3^l, S_3^r, S_3^l$ , insbesondere eine dem Cliffordsehen Parallelismus verwandte Theorie sog. Rechts- und Linksnetze. Durch einmalige Erweiterung von  $G_5$  erkennt man die Bedeutung dieser Gruppe für die Geometrie der (regulären) Flächenelemente  $x, y, z, p, q$ , welche durch  $G_5$  in einfach transitiver Weise transformiert werden. Die erweiterte  $G_5$  gestattet die einfache hyperkomplexe Darstellung  $x' = xa(G_5^r)$ , der durch Übergang zur reziproken einfach transitiven Gruppe die Darstellung  $x' = bx(G_5^l)$  zur Seite tritt.  $G_5^r$  und  $G_5^l$  erzeugen die neungliedrige Übergruppe  $G_9(x' = bxa)$ , welche die natürlichen Äquivalenzbegriffe der Studyschen Kinematik des isotropen Raumes zum Ausdruck bringt. Man verdankt S. Lie eine zweifache Deutung der Flächenelemente  $x, y, z, p, q$  als Punkte eines  $R_5$ . Durch Einführung kanonischer Parameter und Variablen gelingt es Verf., auch für die zweite der beiden Lieschen Abbildungen eine gruppentheoretische Basis zu finden. Bei dieser Abbildung werden alle Elementvereine  $dx_3 = x_4 dx_1 + x_5 dx_2$  auf Kurven bzw. Flächen des  $R_5$  abgebildet, deren Tangenten bzw. Tangentialebenen vollständig dem linearen Komplex  $p_{03} + \frac{1}{2}(p_{14} + p_{25}) = 0$  dem sog. Hauptkomplex angehören (Zur Theorie der ersten dieser Lieschen Abbildungen; vgl. Strubecker, dies. Zbl. 13, 220). Weiterhin werden alle möglichen Typen von Grenzbewegungen des  $I_3$  mit Hilfe einer Klassifikation der eingliedrigen Untergruppen von  $G_5^r$  und  $G_5^l$  studiert. Schließlich gestattet die Entwicklung der Theorie der zweigliedrigen Untergruppen von  $G_5^r$  und  $G_5^l$  (bzw.  $S_5^r$  und  $S_5^l$ ) gewisse räumliche Übertragungen einiger bekannter ebener Sätze von E. Kasner, E. Cesàro und G. Scheffers. *M. Pinl.*

**Auluck, F. C.:** On conics connected with four or more lines. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 7, 5—7 (1938).

Analytischer Beweis zweier Sätze über das Vierseit, die aber von der Umkehrung des Clifford-Miquelschen Satzes nicht wesentlich verschieden sind. Ist nämlich  $\Pi_3$  die dem Vierseit  $V_4$  einbeschriebene Cliffordsche Parabel mit dem Brennpunkt in  $P$ , so bildet die Podare von  $P$  in bezug auf  $\Pi_3$  einen Kegelschnitt  $\Gamma_P$ , dessen asymptotische Richtungen  $\Delta', \Delta''$  auf denjenigen von  $\Pi_3$  senkrecht stehen. Macht man  $P$  variabel, indem man  $\Delta', \Delta''$  projektiv und involutorisch verbindet, so bleibt  $\Pi_3$  nach der Umkehrung des Clifford-Miquelschen Satzes einem  $V_5$  einbeschrieben. Der wesentliche Teil des Ortes ( $P$ ) besteht nach dem direkten Satz entweder aus einer Geraden oder aus einem Kreis, je nachdem die Involution von antiparallelen Richtungen erzeugt ist oder nicht. — Die Sätze des Verf. sind durch besondere Spezialisierungen der Involution sogleich aus obiger Bemerkung zu gewinnen. *D. Barbilian.*

**Narasinga Rao, A.:** On the Miquel-Clifford configuration. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 7, 68—74 (1938).

Noch einige Bemerkungen über die Miquel-Cliffordschen Konfigurationen von  $2^{n-1}$  Kreisen und  $2^{n-1}$  Punkten einer Ebene; insbesondere bestimmen  $2t$  Geraden einer Ebene einen Miquelschen Punkt  $M$  und  $2t+1$  Geraden einen Cliffordschen Kreis. Wenn die ersten  $2t$  Geraden gegeben sind, entspricht jeder weiteren Geraden  $a$  ein Kreis  $a'$  durch  $M$ ; die lineare Abbildung der Kreise der Ebene auf die Punkte des Raumes liefert dann eine entsprechende Cremonasche Verwandtschaft zwischen zwei Tangentialebenen einer Quadrik (dies. Zbl. 16, 132). Daraus kann man leicht folgende Sätze schließen: Wenn der Kreis  $a'$  sich auf eine Gerade reduziert, so beschreibt  $a$  eine Enveloppe der Klasse  $t+1$ , die die unendlich ferne Gerade  $t$ -mal berührt; dasselbe, wenn  $a'$  einen gegebenen Kreis orthogonal durchschneidet; und wenn der Radius von  $a'$  konstant bleibt, so beschreibt  $a$  eine Enveloppe der Klasse  $2t+2$ . Von diesem Standpunkt aus ist auch die Winkeleigenschaft der Konfiguration (dies. Zbl. 17, 417) leicht zu beweisen. *E. G. Togliatti (Genova).*

**Lier, C. van:** Projectivity of homographies and of pencils of quadrics. Nieuw Arch. Wiskde 19, 129—150 (1938).

A proof of the reduction of the equations of a non-singular pencil of quadrics to canonical form, without making use of the theory of invariant factors. *J. A. Todd.*

**Brown, L. M.:** The intersection of certain quadrics. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 5, 125—150 (1938).

The family of quadrics in  $S_{2n}$  which pass through four  $S_{n-1}$ 's in general position has freedom  $n$ . In this paper the author examines the base of this system of quadrics, which is reducible; the relations of the various parts of the base to each other are investigated at length. *J. A. Todd (Cambridge).*

**Lejeune, A.:** Sur quelques congruences linéaires de cubiques gauches. II. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 7, 15—26 (1938).

Verf. setzt die im ersten Teil (vgl. dies. Zbl. 17, 372) begonnene Untersuchung von Kongruenzen kubischer Raumkurven fort, die durch Nullsetzen der 4-reihigen

Determinanten der Matrix  $\begin{pmatrix} A_1 & A'_1 & a_1 & a'_1 & a''_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_4 & A'_4 & a_4 & a'_4 & a''_4 \end{pmatrix}$  definiert werden. Es wird eine Reihe

von Möglichkeiten betrachtet, bei denen die Konstanten  $A$  und die Linearformen  $a$  hierbei von 3 homogenen Parametern oder nur einem Teil derselben linear und z. T. auch quadratisch abhängen. Dies führt auf verschiedene weitere Typen linearer  $C^3$ -Kongruenzen, die z. T. schon früher von Stuyvaert oder Godeaux beschrieben worden sind. *Bureau (Hamburg).*

**Ramamurti, B.:** A theorem on binary quartics and its application to geometry. Math. Student 5, 52—57 (1937).

Eine binäre Form 4. Grades  $a_x^4$  und ihre Hessesche Form  $b_x^4$  bestimmen ein Büschel



$a_x^4 + \lambda b_x^4$ ; wenn die Form  $c_x^4$  zu jeder Form des Büschels apolar ist, so ist die Jacobische Form von  $c_x^4$  und einer anderen beliebigen  $d_x^4$  zur Jacobischen Form des Büschels  $a_x^4 + \lambda b_x^4$  apolar und umgekehrt. Wählt man als Trägergebiete der binären Formen einen Kegelschnitt oder eine kubische Raumkurve oder eine rationale normale  $c^4$ , so erhält man einheitlich verschiedene größtenteils bekannte entsprechende geometrische Sätze.

*E. G. Togliatti (Genova).*

**Dye, L. A.:** A transformation associated with the trisecants of a rational twisted quintic curve. Bull. Amer. Math. Soc. 43, 719—723 (1937).

Examination of an involutorial Cremona transformation of space, of order 43, defined as follows: consider a pencil of ruled cubic surfaces having a fixed double line  $l$  and meeting residually in a rational quintic curve  $C_5$ . Through any point  $P$  of space there passes one surface  $F$  of the pencil. The plane joining  $p$  to the simple directrix of  $F$  touches the surface of trisecants of  $C_5$  at a point  $Q$  of this directrix, and the line  $PQ$  meets  $F$  again in  $P'$ . The correspondence in question is that between  $P$  and  $P'$ .

*J. A. Todd (Cambridge).*

**Burkett, F. J. H.:** Some properties of a sextic with a quadruple point. Tôhoku Math. J. 44, 119—129 (1937).

By using an irrational parametric representation of the plane sextic with a quadruple point the author proves a number of theorems relating to residual sets of points on the curve. His method is based on a set of equations, here established directly, which however are simply the ordinary expressions given by Abel's theorem for the intersections of the sextic with other curves.

*J. A. Todd (Cambridge).*

**Roth, Leonard:** Some threefolds of genera zero. Proc. London Math. Soc., II. s. 44, 36—52 (1938).

Über denselben Gegenstand gibt es auch tiefere Untersuchungen von G. Fano (Atti Congr. Intern. Bologna 4, 115; dies. Zbl. 16, 133 u. 15, 372). Die Anregung zur vorliegenden Abhandlung ist in der ersten der obengenannten Arbeiten von G. Fano zu finden. Es handelt sich um  $V_3$  mit allen Geschlechtern gleich Null; die Ergebnisse sind größtenteils bekannt. Zunächst einige allgemeine Eigenschaften über die singularitätenfreien  $V_3^{2\pi-2}$  des Raumes  $S_{\pi+1}$ , deren Schnittkurven kanonische Kurven des Geschlechts  $\pi$  sind: Quadriken durch  $V$ , Projektionen von  $V$  aus einer auf ihr liegenden Linie, Flächen, die auf  $V$  liegen (der Satz, daß jede solche Fläche die Schnittfläche von  $V$  selbst mit einer Hyperfläche ist, ist nur gültig, wenn für  $V$  sehr allgemeine Voraussetzungen erfüllt sind). Es folgen eine Reihe von Beispielen, die die allgemeinen  $V_3^{2\pi-2}$  für  $\pi = 3, 4, 5, 6$  betreffen. Die hier als allgemein bezeichnete  $V_3^{12}$  ist nur einer der möglichen Fälle, wie Verf. selbst in einer Fußnote bemerkt. Andere Beispiele für  $\pi = 8, 9, 13$ . Verschiedene Darstellungen der betrachteten  $V$  auf Hyperflächen des Raumes  $S_4$  und auf Involutionen des Raumes  $S_3$ ; verschiedene Beziehungen, die sie miteinander und mit der allgemeinen  $V_3^3$  des Raumes  $S_4$  aufweisen; Bemerkungen über ihre gesicherte oder vermutete Irrationalität. Schließlich noch etwas über die  $V$ , deren Schnittkurven eine  $g_3^1$  enthalten, und über die  $V_3^n$  des Raumes  $S_4$ , die eine  $(n-2)$ -fache Gerade enthalten.

*E. G. Togliatti (Genova).*

**Godeaux, Lucien:** Sur la construction de surfaces et de variétés algébriques de diviseur supérieur à l'unité. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 24, 78—83 (1938).

L'A. donne la représentation analytique et une construction géométrique très simple pour certaines variétés algébriques, de dimension  $d$  arbitraire, ayant comme diviseur un entier  $n > 1$  quelconque (c'est-à-dire telles que  $n$  résulte le nombre maximum des leurs systèmes de  $V_{d-1}$  distincts, admettant un même système de  $V_{d-1}$  comme multiple). La construction indiquée contient, comme cas particuliers, des résultats précédemment obtenus par l'A. [L. Godeaux, Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 23, 830 (1937); voir ce Zbl. 18, 38].

*Beniamino Segre (Bologna).*

**Godeaux, Lucien:** Sur les surfaces algébriques de genres un et de rang six. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 7, 64—68 (1938).

In einer Ebene  $\pi$  erzeugen die zyklische Homographie  $H = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$  und die involutorische quadratische Transformation  $T = \begin{pmatrix} x_2 x_3 & x_3 x_1 & x_1 x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$  eine endliche Gruppe  $G_6$  und daher eine Involution 6. Ordnung  $I'_6$ . Wenn man in  $\pi$  eine geeignete Kurve  $C^6$  (die von  $T, H$  in sich selbst verwandelt wird) als Verzweigungskurve betrachtet, so erhält man eine Doppelebene  $F$  mit  $p_a = P_4 = 1$ , welche eine Involution 6. Ordnung  $I_6$  enthält; diese ist durch die von  $T$  erzeugte Involution  $I_2$  zusammengesetzt.  $I_2$  kann auf eine Doppelfläche  $F^3$  abgebildet werden (s. L. Godeaux, Mathesis 1922, 19—23), so daß der Kurve  $C^6$  die Schnittkurve  $D$  von  $F^3$  mit einer Quadrik entspricht; und diese  $F^3$  kann ihrerseits als Doppelprojektion einer Fläche  $\Psi^6$  des Raumes  $S_4$ , mit  $D$  als Verzweigungskurve, angesehen werden. Man erhält so auf  $\Psi^6$ , als Bild von  $I_6$ , eine Involution  $I'_3$ : Jeder Gruppe von  $I_6$  entspricht eine Gruppe von  $I'_3$  und umgekehrt. Die Involution  $I'_3$  kann auf  $\Psi^6$  durch die Homographie  $H' = \begin{pmatrix} y_0 & y_2 & y_3 & y_1 & y_4 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}$  erzeugt werden; diese besitzt u. a. zwei isolierte Doppelpunkte  $P_1(0 \ 1 \ \varepsilon \ \varepsilon^2 \ 0)$ ,  $P_2(0 \ 1 \ \varepsilon^2 \ \varepsilon \ 0)$ , wobei  $\varepsilon^3 = 1$  ist; jede Ebene durch  $P_1 P_2$  schneidet  $\Psi^6$  in zwei Gruppen von  $I'_3$ ; die Projektion von  $\Psi^6$  von  $P_1 P_2$  aus auf einer Ebene  $\Phi$  führt also schließlich zur Abbildung der ursprünglichen Involution  $I_6$  auf der Doppelebene  $\Phi$ , für welche ebenfalls  $p_a = P_4 = 1$  ist. Die Verzweigungskurve  $\Delta$  von  $\Phi$  hat die Ordnung 6 und besitzt zwei Doppelpunkte, zwei Spitzen und zwei weitere Doppelpunkte, denen zwei Selbstberührungspunkte unendlich benachbart sind. Man hat so ein Beispiel einer Fläche, die Doppelebene  $\Phi$ , mit  $p_a = P_4 = 1$  und dem Range 6, die nicht hyperelliptisch ist.  
E. G. Togliatti (Genova).

**Rozet, O.:** Sur les points unis des involutions non cycliques d'ordre huit appartenant à une surface algébrique. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 7, 8—15 (1938).

L'A. démontre que, sur une surface algébrique, une involution d'ordre huit n'ayant qu'un nombre fini de points unis et engendree moyennant deux transformations birationnelles permutables, de période quatre, dont les carrés coïncident, ne possède que des points unis doubles ou quadruples. Une surface image d'une telle involution peut se ramener, par une transformation birationnelle, à une surface normale possédant à chacun des points de diramations une des singularités suivantes: a) point quadruple à cône tangent rationnel; b) point double biplanaire auquel est infiniment voisin un point double conique; c) point double conique. La recherche a plusieurs points de contact avec des travaux antérieurs de L. Godeaux (cfr. notamment L. Godeaux, Les involutions appartenant à une surface algébrique. Paris: Hermann 1935; ce Zbl. 13, 413).  
Beniamino Segre (Bologna).

**Lippert, J.:** Sur les involutions abéliennes du quatrième ordre de l'espace. I. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 7, 26—33 (1938).

**Lippert, J.:** Sur les involutions abéliennes du quatrième ordre de l'espace. II. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 7, 82—87 (1938).

Il est bien connu que, dans l'espace ordinaire, il y a deux types de groupes tri-rectangles engendrés par des homographies biaxiales harmoniques; les axes des trois homographies sont, dans un cas, les trois couples de côtés opposés d'un tétraèdre et, dans l'autre, trois couples de génératrices du même mode d'une quadrique (se séparant harmoniquement deux à deux). Ici l'A. considère l'involution abélienne  $I_4$ , d'ordre quatre, engendrée par un groupe du 1<sup>er</sup> type (dans la première Note) ou du 2<sup>e</sup> type (dans la seconde Note), et il construit et étudie une  $V_3^{16}$  de  $S_{10}$  image de  $I_4$ . Dans le premier cas  $V_3^{16}$  possède six coniques doubles se rencontrant trois à trois en quatre points, et elle admet trois systèmes d'hyperquadriques (passant par quatre des coniques doubles) la touchant suivant des surface du 16<sup>me</sup> ordre; dans le deuxième cas  $V_3^{16}$



possède trois quartiques gauches rationnelles doubles, appartenant à un même hyperplan.

*Beniamino Segre (Bologna).*

**Baudet, A.:** Sur une transformation birationnelle de l'espace. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 7, 76—82 (1938).

Discussion of the fundamental elements of the cubic Cremona transformation whose equations are

$$\frac{x_1}{y_1 y_3 y_4} = \frac{x_2}{y_1 y_2 y_3} = \frac{x_3}{y_2 y_4^2} = \frac{x_4}{y_2 y_1^2}.$$

*J. A. Todd (Cambridge).*

**Baudet, A.:** Sur l'homographie cyclique de période cinq de l'espace et sur quelques transformations birationnelles qui s'en déduisent. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 23, 927—933 (1937).

Given a collineation  $H$  of period five in ordinary space, determining an involution  $I_5$  of sets of five points, there are five linear systems of cubic surfaces invariant under  $H$ . Each of these systems is of freedom three and degree five, three surfaces of a system meeting, outside the base, in one set of  $I_5$ . By referring the surfaces of two of the systems to planes in two spaces  $S, S'$  the author derives a cubic Cremona transformation of period four.

*J. A. Todd (Cambridge).*

**Babbage, D. W.:** The resolution of monoidal Cremona transformations of three-dimensional space. Proc. Cambridge Philos. Soc. 34, 22—26 (1938).

An  $M$ -transformation between two three-dimensional spaces  $S, S'$  is a bimonoidal Cremona transformation with the property that the lines and planes through the fixed vertex  $O$  of the monoids in  $S$  are transformed respectively into lines and planes through the fixed vertex  $O'$  of the monoids in  $S'$ . The author proves the theorem: Every monoidal Cremona transformation between  $S$  and  $S'$  can be expressed as the product of a finite number of  $M$ -transformations.

*J. A. Todd (Cambridge).*

### Differentialgeometrie:

**Schilt, Heinz:** Über die isolierten Nullstellen der Flächenkrümmung und einige Verbiegbarkeitssätze. Compositio Math. 5, 239—283 (1937).

A regular point  $O$  of a surface in the neighborhood of which the Gaussian curvature  $K$  is negative is a saddle point in which a number of valleys and ridges of the surface originate: if  $K$  is negative in  $O$ , this number is two; if  $K$  is zero in  $O$ , it can happen that the number is greater than two. The order  $s$  of a saddle point is defined to be the number of valleys originating in  $O$  minus one. The author proves the equivalence of two other definitions of the number  $s$ : 1. The spherical image of a saddle point of order  $s$  has the appearance of the Riemann surface of the function  $\sqrt{s}$  in the neighborhood of the branch point  $z = 0$ . 2. In making a single circuit about  $O$ , the directions of the two fields of directions of both the asymptotic lines and the lines of principal curvature turn through an angle  $(1 - s)\pi$ . These results follow from investigations similar to those of Bendixson [Acta math. 24, 1—88 (1901)] on the nature of the integral curves of a differential equation in the neighborhood of a singularity. — The author proceeds next to show that the quantity  $s$  is an invariant under a continuous deformation which preserves the line element (stetige Verbiegung). However, and this is an especially important and noteworthy result of the paper, the quantity  $s$  is not determined by the line element alone: in other words, surfaces can be found which are isometric, but for which the number  $s$  is not the same, and which, therefore, can not be deformed into one another in a continuous manner. This last can not be accomplished even if a reflection in a plane be admitted in addition to a continuous deformation. The proof is obtained by a procedure due to Darboux (Theorie des Surfaces III, p. 254) in combination with an existence theorem for a partial differential equation which leads to the following result: If  $O$  is a saddle point (for which  $s$  may or may not equal one) of an analytic surface  $F$ , there exists an isometric surface  $F'$  such that the corresponding point  $O'$  is a saddle point of order  $s$

equal to one. — The paper closes with a discussion of special examples of saddle surfaces. *Stoker* (New York).

**Ljuskchin, W.:** Über die Verbiegung von Rotationsflächen negativer Krümmung mit einem singulären Punkte. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 17, 339—341 (1937).

En poursuivant (voir ce Zbl. 17, 421) l'étude de la déformation infiniment petite d'un morceau d'une surface de révolution à courbure négative l'auteur examine la déformation de la surface engendrée par la révolution autour de l'axe  $Z$  d'un segment d'une ligne  $OA$  qui coupe au point  $O$  l'axe  $Z$  sous un angle  $\arctg a > 0$  et dont la tangente au point  $A$  lui est perpendiculaire. En déterminant la solution des équations de la déformation qui vérifie les conditions au point  $O$  ou bien celles au point  $A$ , l'auteur montre que pour un ensemble dénombrable des nombres  $a = a^{(i)}$  on peut disposer des constantes arbitraires des deux solutions de façon à faire les coïncider. La surface qui correspond à un nombre  $a^{(i)}$  admet une déformation infiniment petite au cours de laquelle le point  $O$  reste conique. *S. Finikoff* (Moscou).

**Myller, A.:** Propriétés des surfaces données en coordonnées semi-polaires par l'équation  $r = \varphi(\omega) + \psi(z)$ ; leur génération, relation avec les surfaces moulures. Gaz. mat. 43, 342—344 (1938) [Rumänisch].

**Sasaki, Shigeo:** Contributions to the affine and projective differential geometries of space curves. Jap. J. Math. 13, 473—481 (1937).

Verf. dehnt seine früheren Untersuchungen (vgl. dies. Zbl. 16, 223) auf die Raumkurven aus. Durch einen geeigneten Normierungsfaktor läßt sich die affine Normaldarstellung einer Kurve in die projektive Normaldarstellung überführen, wenn die Tangenten der Kurve keinem linearen Komplex angehören. Es werden die Kurven betrachtet, deren projektive und affine Haupt- und Binormale zusammenfallen. Der Schluß ist den  $W$ -Kurven gewidmet, die keinem linearen Komplex angehören.

*W. Haack* (Karlsruhe).

**Kanitani, Jōyō:** Détermination d'une courbe au moyen des invariants fondamentaux. II. Mem. Ryojun Coll. Engrg 10, 75—87 (1937).

(Comp. the papers by the same author, this Zbl. 14, 278.) Let  $\Gamma(t)$  be a curve referred to a canonical system of reference. Then the coefficients  $b$ , used in the papers mentioned above, may be expressed as polynomials in  $\varphi\left(p, s, \frac{d}{dt}\right)\theta_p$ , where  $\varphi$  are symbolic operators depending on integers  $p, s$  (and defined by recurrent formulas), while  $\theta_p$  are the invariants of  $\Gamma(t)$  introduced by author in the previous papers.

*Hlavatý* (Princeton, U.S.A.).

**Gore, G. D.:** Transformations of a surface bearing a family of asymptotic curves. Trans. Amer. Math. Soc. 43, 303—320 (1938).

Die Untersuchung ist ein Seitenstück zu den Ergebnissen von Levy (Eisenhart, Transformations of Surfaces, Princeton 1923). Sie bezieht sich auf den „parabolischen Fall“, in welchem das konjugierte Netz auf einer Fläche im  $R_n$  durch eine (einzige) asymptotische Kurvenschar ersetzt wird. — Es sei  $E(y) \equiv y_{uu} + a y_u + b y_v + c y = 0$ ,  $b \neq 0$ , eine parabolische Differentialgleichung und  $S(y)$  eine zu  $E(y)$  gehörige Fläche in  $R_n$ , unter  $(y)$  homogene Punktkoordinaten verstanden. Man zeigt, daß alle zu der Tangentenkongruenz von  $v = \text{konst.}$  transversalen Flächen  $\Sigma(x)$ , auf denen  $v = \text{konst.}$  wieder eine asymptotische Schar ist, aus der Darstellung  $x = y R_u - y_u R$ ,  $E(R) = 0$ , zu gewinnen sind. — Man sagt, daß zwei zu denselben  $S(y)$  gehörige  $\Sigma_1(x)$ ,  $\Sigma_2(x)$  die Relation  $F'$  aufweisen. Die Aufstellung aller  $F'$ -Transformierten  $S'(x)$  von  $S(x)$  fordert zwei Lösungen zweier parabolischer Differentialgleichungen, von denen eine  $E(x) = 0$  ist — und außerdem eine Quadratur. — Die Transformation  $F'$  gibt Anlaß zu einem Vertauschungssatz, der dem zur Ribaucourschen Transformation gehörigen Vertauschungssatz nachgebildet wird. — Wir erwähnen unter anderem noch die Sätze: 1. Die abbildende Geradenkongruenz  $(y, y_u)$  eines  $F'$ -Flächenpaares  $\Sigma_1(x)$ ,  $\Sigma_2(x)$ , wobei  $\Sigma_1(x)$  auf einer  $M_{n-1}^2$  liegt, schneidet aus  $M_{n-1}^2$  eine weitere Fläche  $\Sigma_3(x)$ , die



zu den früheren in der Beziehung  $F'$  steht. 2. Der Schnitt jeder parabolischen Kongruenz  $(y, y_u)$  mit einem  $R_{n-1}$  ist eine  $\Sigma$ -Fläche, d. h. er trägt eine asymptotische Schar  $v = \text{konst.}$

*D. Barbilian* (București).

**Finikoff, S.: Surfaces dont les trièdres fondamentaux se coupent.** Rec. math. Moscou, N. s. 2, 627—662 u. franz. Zusammenfassung 663 (1937) [Russisch].

L'auteur envisage les propriétés des deux surfaces  $S$  et  $S'$  dont les lignes de courbure se correspondent et les tangentes aux lignes de courbure homologues se coupent. L'auteur étudie les cas possibles: 1. Les tangentes aux ligne de courbure et les normales se coupent. Les surfaces  $S$  et  $S'$  sont en transformation de Ribaucour. 2. Les normales ne se coupent pas. La droite  $F_1F_2$  d'intersection de plans tangentes des surfaces  $S$  et  $S'$  en points correspondents engendre une congruence cyclique d'une infinité de manières,  $S$  et  $S'$  étant les surfaces orthogonales aux cycles de deux systèmes différents associés à la congruence  $(F_1F_2)$ .

*Nil Glagoleff* (Moscou).

**Vincensini, Paul: Transformations de systèmes cycliques déduites de l'équation de Laplace.** Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 24, 65—72 (1938).

Deux systèmes cycliques  $(C)$  et  $(C')$  sont transformés  $T$  l'un de l'autre si la figure de deux cercles homologues  $[CC']$  a une forme invariable quel que soit le couple de cercles considéré. Exemples: 1° Les systèmes cycliques associés à deux surfaces pseudosphériques en transformation de Bäcklund. 2° Congruence cyclique normale et le système cyclique associé. 3° Les systèmes cycliques dont les cercles passent par un point fixe  $O$  et qui restent cycliques lorsqu'on fait tourner chaque cercle d'un angle constant autour de sa tangente en  $O$  [Ann. École norm. Sup. (3) 47, 416 (1930)]. — L'auteur donne une autre solution du problème en déterminant tous les systèmes  $(C)$ ,  $(C')$  dont les cercles sont orthogonaux à un plan fixe  $p$ . Ce sont les systèmes de Darboux dont les deux points  $P, P_1$  d'intersection de  $C$  avec  $p$  réalisent une correspondance conforme directe du plan. Si la figure  $(P P_1 P' P'_1)$  a une forme arbitraire mais invariante, les points  $P' P'_1$  les cercles homologues  $C'$  du système transformé  $(C')$ .

*S. Finikoff* (Moscou).

**Pantazi, Al.: Sur la détermination du rang d'un tissu plan.** C. R. Acad. Sci. Roum. 2, 108—111 (1938).

Der Rang eines Gewebes aus  $n$  Kurvenscharen  $u_i(x, y) = \text{const}$  ist die Dimension der linearen Schar der Relationen  $\sum_i f_i(u_i) \equiv 0$ . Es wird eine Methode angegeben, die die Bestimmung dieses Ranges lediglich durch Differenzieren und Auflösen linearer Gleichungen ermöglicht. Durch Integration eines vollständig integrierbaren Systems totaler Diff.-Gleichungen könnte auch eine Basis für die Schar der Relationen gefunden werden. Nebenbei ergibt sich wieder der Satz, daß der Rang  $\leq (n-1)(n-2)/2$  ist. *Lochs*.

**Pinl, M.: Zur Existenztheorie und Klassifikation totalisotroper Flächen.** Compositio Math. 5, 208—238 (1937).

Be  $x(u^1, u^2)$  a surface immersed in an Euclidean  $n$ -dimensional space and  $x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_r} = \frac{\partial^r x}{\partial u^{\alpha_1} \dots \partial u^{\alpha_r}}$ ,  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2)$ . If  $x_{\alpha} \cdot x_{\beta} = 0$   $g_{\alpha\beta\gamma\delta} = x_{\alpha\beta} \cdot x_{\gamma\delta} \neq 0$  then the surface is called (simply) total isotropic surface. According to seven projectively different canonical forms of  $g_{\alpha\beta\gamma\delta} du^{\alpha} du^{\beta} du^{\gamma} du^{\delta}$  seven projectively different types, say *I, II, ..., VII*, of total isotropic surfaces may be distinguished. If  $v$  is the dimensionality of the second osculating space (i.e. of the space defined by  $x, x_{\alpha}, x_{\alpha\beta}$ ) then any corresponding total isotropic surface of kind  $\alpha$  ( $\alpha = I, \dots, VII$ ), may be thought of as belonging to the "class"  $(\alpha, v, n)$ , where obviously  $3 \leq v \leq 5$ . The author shows that for  $n = 5, \dots, 9$  the total amount of all classes is 33. Some of them were already discussed by the author himself in his previous papers. In this paper he finds concrete examples for the remaining classes.

*Hlavatý* (Princeton, U.S.A.).

**Sun, Tseying: On the complete set of identities for metric space.** Tôhoku Math. J. 44, 32—38 (1937).

The author gives the relations, which express the components of the metric normal

tensors in the metric curvature tensor and its covariant derivatives. By means of these relations a complete set of identities for the components of the covariant derivatives of the metric curvature tensor is obtained from the complete set of identities for the metric normal tensors. The proof is given by mathematical induction.

*J. Haantjes (Delft).*

**Nazim, Ahmet:** Über Finslersche Räume. München: Diss. 1936. 55 S.

**Haimovici, M.:** Le parallélisme dans les espaces de Finsler et la différentiation invariante de M. Levi-Civita. Ann. Sci. Univ. Jassy, I: Math. 24, 214—218 (1938).

The author shows that choosing conveniently the function  $\Delta$  in Levi-Civita's device [Differenzialen segundas que se comportan de modo invariante. Rev. Hisp. Amer. 5, 165—176 (1923)], one gets differentials of the privileged element which define Finsler's parallelism. A slight modification of the device mentioned above leads to the Cartan parallelism in a Finsler space.

*Hlavatý (Princeton, U.S.A.).*

**Sasaki, Shigeo:** Non-Euclidean geometry in general space. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. 26, 313—322 (1937).

The author generalizes Veblen's projective differential geometry of curved spaces [Ergebn. d. Math. 2 (1933)] for Finsler space. The main points of this method may be described as follows: (1) Starting with the generalized Veblen's transformation

$$x^{\sigma'} = x^{\sigma'}(x^1, \dots, x^n), \quad x^0' = x^0 + \log \varrho(x, \dot{x}) \quad (a, b, c = 1, \dots, n)$$

one introduces first the parameter  $\dot{x}^0$  which is supposed to transform in such a way

that  $\dot{x}^{\nu'} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\lambda}} \dot{x}^{\lambda}$  ( $\nu, \lambda, \mu = 0, \dots, n$ ). — (2) If  $G_{\lambda\mu}(x, \dot{x})$  is the given metric projective tensor, then the symmetric projective connection  $\Pi_{\lambda\mu}^{\nu}$  for which  $V_{\omega} G_{\lambda\mu} = 0$  is uniquely expressed by means of a basic connection  $\Delta_{\lambda\mu}^{\nu}$  in the following way

$$\Pi_{\lambda\mu}^{\nu} = \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \lambda \mu \end{matrix} \right\}_G - \frac{1}{2} G^{\nu\sigma} \dot{x}^{\tau} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{x}^{\sigma}} G_{\sigma\mu} \delta_{\lambda}^{\alpha} + \frac{\partial}{\partial \dot{x}^{\sigma}} G_{\lambda\sigma} \delta_{\mu}^{\alpha} - \frac{\partial}{\partial \dot{x}^{\sigma}} G_{\lambda\mu} \delta_{\sigma}^{\alpha} \right) \Delta_{\alpha\tau}^{\nu}.$$

(One gets this result by applying the usual procedure to Ricci's lemma. Ref.) —

(3) The connection  $\Delta$  already mentioned may be defined by the following relations

$$\Delta_{bc}^a = B_{bc}^a, \quad \Delta_{bc}^0 = \varphi_{(b,c)}, \quad \Delta_{i0}^{\nu} = \Delta_{0i}^{\nu} = 0$$

where  $B_{bc}^a$  is the Berwald connection of the Finsler geometry associated with the integral

$$\int \sqrt{\left( \frac{G_{ab}}{G_{00}} - \frac{G_{a0}G_{b0}}{G_{00}^2} \right)} \dot{x}^a \dot{x}^b dt,$$

$\varphi_{\lambda} = \frac{G_{\lambda 0}}{G_{00}}$  and  $\varphi_{b,c}$  is the covariant derivative of  $\varphi_b$  with respect to  $B_{bc}^a$ . The proof follows from the transformation law.

*Hlavatý (Princeton, U.S.A.).*

### Allgemeine metrische Geometrie, Integralgeometrie, Konvexes und Verwandtes:

**Lévy, Paul:** Sur la variation du maximum d'une fonction. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 228—229 (1938).

In Verallgemeinerung einer Formel von R. von Mises (vgl. dies. Zbl. 17, 426) zeigt Verf.: Es sei  $E$  eine kompakte abgeschlossene Menge und  $f(A)$  eine Funktion des Elementes  $A$  von  $E$ , die noch von einem Parameter  $\lambda$  abhängt, und zwar derart, daß  $\Delta f(A) = g(A) d\lambda + o(d\lambda)$ . Das Maximum von  $f(A)$  auf  $E$  werde mit  $\varphi(\lambda)$  bezeichnet; es möge etwa auf der Teilmenge  $E'$  angenommen werden. Ist dann  $g(A)$  nach oben (unten) halbstetig, so besitzt  $\varphi(\lambda)$  eine rechtsseitige (linksseitige) Ableitung, die gleich ist dem Maximum (Minimum) von  $g(A)$  auf  $E'$ . *W. Feller (Stockholm).*

**Golab, Stanislas:** Sur la fonction représentant la distance d'un point variable à un ensemble fixe. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 406—408 (1938).

L'aut. complète les résultats de R. de Mises (voir ce Zbl. 17, 426) dont l'origine est dans un théorème de Mandelbrojt (voir ce Zbl. 16, 308). Etant donné un en-



semble fermé  $E$  de points dans un espace euclidien à  $n$  dimensions, la distance  $f(M)$  d'un point  $M$  à  $E$  est le minimum de la distance  $\varrho(M, X)$  de  $M$  aux points  $X$  de  $E$ . Si  $f(M) > 0$ , l'aut. dit avec Bouligand (Introduction à la géométrie infinitésimale directe, p. 92; voir ce Zbl. 5, 375) que  $M$  est point ordinaire si  $\varrho(M, X) = f(M)$  pour un seul  $X$ , dans le cas contraire,  $M$  est un point de multifurcation. Il démontre que: I. La condition nécessaire et suffisante pour que  $f(M)$  possède en  $M$  une différentielle au sens de Stolz-Fréchet, est que  $M$  soit point ordinaire. II. En tout point de multifurcation,  $f(M)$  admet une différentielle au sens de Gâteaux. L'aut. esquisse la démonstration dans le cas du plan; il s'appuie sur ses résultats antérieurs relatifs à l'existence de la différentielle totale [Ann. Soc. Polon. math. 16, 31—40 (1937)]. (Note du Réf. Dans ce cas du plan, la seconde partie de I [condition suffisante], qu'on peut mettre sous forme entièrement géométrique en introduisant le gradient, semble découler, sans plus, de la démonstration du théorème de Mandelbrojt donnée par le Réf.)

G. Valiron (Paris).

**Bouligand, Georges:** Sur la distance d'un point variable à un ensemble fixe. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 552—554 (1938).

L'aut. montre que les considérations développées par R. de Misès (voir ce Zbl. 17, 426) et par S. Golab (voir le réf. préc.) et concernant l'existence de la dérivée dans une direction ou du gradient de la fonction de point représentant la plus courte distance d'un point à un ensemble fermé, peuvent être présentées, poursuivies et généralisées en utilisant sa terminologie (semi-continuité supérieure d'inclusion, accumulatif, contingent) et ses travaux antérieurs [voir surtout, Mém. Sci. math. 71 (1935); ce Zbl. 10, 373]. Il entre dans le détail des raisonnements dans le cas de l'espace à trois dimensions et retrouve les théorèmes de S. Golab. Il signale que ses raisonnements se généralisent au cas où la métrique euclidienne est remplacée par une métrique de Finsler.

G. Valiron (Paris).

**Dvoretzky, Aryeh:** Sur la base géométrique du théorème de M. Mandelbrojt et de théorèmes analogues. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 806—808 (1938).

Comme complément à ses recherches (voir ce Zbl. 17, 72, et lire dans l'expression de  $L_k(0)$ ,  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$  au lieu de  $\sqrt{\phantom{x}}$ ) et à celles de de Misès (voir ce Zbl. 17, 426) sur la base géométrique du théorème de Mandelbrojt (voir ce Zbl. 16, 308), l'aut. généralise au cas de l'espace à  $N$  dimensions les propositions dont il s'était servi. Voici l'une de ces généralisations. Soit  $S$  un ensemble fermé de l'espace à  $N$  dimensions; attachons à chaque point  $s$  de  $S$  un nombre  $p_s$  qui est infini si  $s$  est point d'accumulation, infini ou entier positif si  $s$  est isolé.  $P$  désigne la somme de tous les  $p_s$ ;  $R(M, n)$  est le rayon de la sphère  $\Sigma(M, n)$  de centre  $M$ , de rayon minimum, pour laquelle la somme des  $p_s$  pour les points  $s$  appartenant à  $\Sigma(M, n)$  est supérieure ou égale à  $n$ . Soit  $Q$  un point pris sur une demidroite donnée  $MX$  issue de  $M$ . Si  $n \leq P$  et si  $R(M, n) \neq 0$ , le quotient de  $R(Q, n) - R(M, n)$  par  $\overline{MQ}$  a une limite lorsque  $Q$  tend vers  $M$ ; cette limite est  $-\cos \omega_n$ ,  $\omega_n$  désignant l'angle minimum pour lequel la somme des  $p_s$ , étendue aux  $s$  intérieurs à  $\Sigma(M, n)$  et aux  $s$  situés sur la surface de  $\Sigma(M, n)$  et tels que  $s\widehat{MX} \leq \omega_n$ , est au moins égale à  $n$ .

G. Valiron (Paris).

**Busemann, Herbert:** On translations in general plane geometries. Amer. J. Math. 60, 227—256 (1938).

Es wird ein zweidimensionaler Geradenraum  $\Sigma$  zugrunde gelegt (vgl. über diesen Begriff dies Zbl. 3, 316). Unter einer Translation von  $\Sigma$  längs einer Geraden  $g$  wird eine isometrische (von selbst fixpunktfreie) Abbildung von  $\Sigma$  auf sich verstanden, die jede der beiden durch  $g$  bestimmten „Halbebenen“ in sich überführt. Gegenstand der Arbeit ist die Frage, wieweit die Metrik durch die Forderung der Existenz von mehr und mehr Translationen eingeschränkt wird. Insbesondere werden hierbei die Beziehungen zum Desargueschen Satz und zum Parallelenaxiom erörtert. Auf diese Weise gelangt der Verf. u. a. zu einer neuen axiomatischen Charakterisierung

der Minkowskischen und der hyperbolischen Geometrie. — Eine wesentliche Rolle spielt hierbei der Begriff der Asymptote einer orientierten Geraden  $\vec{g}$  durch einen Punkt  $P$  außerhalb  $g$ . Darunter wird die Grenzlage der Geraden  $PQ$  verstanden, wenn  $Q$  auf  $g$  im Sinne der Orientierung gegen  $\infty$  strebt. Ob der Asymptotenbegriff im allgemeinen Fall symmetrisch ist, bleibt unentschieden. Fallen die beiden Asymptoten einer Geraden  $g$  durch  $P$  in dieselbe Gerade  $h$ , so heißt  $h$  die Parallele zu  $g$  durch  $P$ . — Zunächst wird die Annahme verfolgt, daß es „alle“ Translationen längs einer Geraden  $g$  gibt, d. h. daß es zu jedem Punktepaar  $A, B$  auf  $g$  eine (und, wie leicht zu sehen, nur eine) Translation längs  $g$  gibt, die  $A$  in  $B$  überführt. Die Geometrien mit dieser Eigenschaft sind noch recht allgemein. Z. B. kann es vorkommen, daß die Linien konstanten Abstands  $r$  von  $g$ , deren jede, wie Verf. zeigt, mit  $g$  einen konvexen Bereich begrenzt, für ein  $r_0 > 0$  und damit für alle  $r < r_0$  Geraden, für  $r > r_0$  aber keine Geraden sind. — Existieren alle Translationen längs zweier Geraden  $g$  und  $h$  und ist keine der Geraden  $g$  und  $h$  eine Asymptote (oder parallel) der anderen, so gilt der Desarguessche Satz und die Geometrie ist Minkowskisch oder hyperbolisch. Ist dagegen  $h$  Asymptote von  $g$  und, was hier folgt,  $g$  Asymptote von  $h$ , so braucht der Desarguessche Satz nicht zu gelten, nicht einmal wenn man außerdem das Parallelenaxiom in der euklidischen oder der hyperbolischen Form postuliert. Diese und eine Reihe ähnlicher negativer Aussagen werden durch explizite Angabe von Beispielen nachgewiesen.

W. Fenchel (Kopenhagen).

**Pauc, Chr.:** *L'inégalité triangulaire dans les espaces de Minkowski généralisés.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 26, 369—374 (1937).

Im Anschluß an Alt (dies. Zbl. 16, 374) diskutiert Verf. die Beziehungen zwischen der Gestalt des Eichkörpers (Konvexität im weiteren oder strengen Sinne) und der Gültigkeit des Gleichheitszeichens in der Dreiecksungleichung für nichtkollineare Punktetripel. Es läuft dies auf die Untersuchung der Linearitätsrichtungen der Distanzfunktion hinaus (vgl. Bonnesen-Fenchel, Theorie der konvexen Körper, S. 20). Für zweimal stetig differenzierbare Distanzfunktionen werden die betreffenden Bedingungen analytisch formuliert. Anwendung auf den Integranden eines Variationsproblems in Parameterdarstellung ergibt die Bedingung von Legendre-Clebsch für Quasiregularität bzw. Regularität auch bei nichtdefinitem Problem.

W. Fenchel.

**Aronszajn, N.:** *Sur quelques problèmes concernant les espaces de Minkowski et les espaces vectoriels généraux.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 26, 374—376 (1937).

Ergebnisse von Alt und Pauc (vgl. vorst. Ref.) über verallgemeinerte Minkowskische Räume werden etwas anders begründet und auf Vektorräume unendlicher Dimension übertragen. Es handelt sich dann also um Banachsche Räume mit indefiniter Norm.

W. Fenchel (Kopenhagen).

**Lewy, Hans:** *On differential geometry in the large. I. (Minkowski's problem.)* Trans. Amer. Math. Soc. 43, 258—270 (1938).

Es handelt sich um die Bestimmung einer geschlossenen konvexen Fläche  $B$ , für welche die Gaußsche Krümmung  $K = K(n)$  als Funktion der inneren Normalenrichtung vorgeschrieben ist; dabei muß vorausgesetzt werden, daß  $K(n)$  drei trivialerweise notwendige Integralrelationen erfüllt. Abgesehen von einem Eindeutigkeitssatz ist bisher nur bekannt, daß es eine Fläche  $B'$  gibt, für welche  $K(n)$  die Krümmungsfunktion in einem verallgemeinerten Sinne ist, welche jedoch an sich nur dann mit der Gaußschen zusammenzufallen braucht, wenn  $B'$  hinreichend oft differenzierbar ist, worüber aber nichts bekannt ist. Verf. liefert einen Beweis für die Existenz einer analytischen Fläche  $B$  im Falle eines analytischen  $K(n)$ . Die Beweismethode ist völlig neu und beruht wesentlich auf einem Satz des Verf. über Differentialgleichungen vom Monge-Ampèreschen Typus (dies. Zbl. 17, 211). Ist nämlich  $Z = F(X, Y)$  die Cartesische Gleichung von  $B$  und wird  $x = Z_X$ ,  $y = Z_Y$  und  $H(x, y) = -Z + xX + yY$



gesetzt, so genügt  $H$  der Differentialgleichung  $H_{xx}H_{yy} - H_{xy}^2 = K^{-1}\{1 + x^2 + y^2\}^{-2}$ . Es wird sodann gezeigt, daß wenn  $K$  analytisch von einem Parameter  $t$  abhängt und eine Lösung des Problems für  $t = 0$  existiert, so auch für alle hinreichend kleinen  $|t|$ . — Verf. liefert auch einen eleganten neuen Eindeutigkeitsbeweis, der nach dem Vorgehen von Cohn-Vossen (Göttinger Nachr. 1927) die Aufgabe auf die Bestimmung des Index eines Vektorfeldes zurückführt.

W. Feller (Stockholm).

Vincensini, P.: Su una classe di funzioni convesse. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 26, 366—368 (1937).

Verf. spricht das Resultat einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. 16, 374; 18, 42) für die Stützfunktionen der Körper aus (vgl. hierzu das zweitgenannte Referat).

W. Fenchel (Kopenhagen).

Behrend, Felix: Über die kleinste umbeschriebene und die größte eingeschriebene Ellipse eines konvexen Bereichs. Math. Ann. 115, 379—411 (1938).

Weitgehende Untersuchung der umbeschriebenen Ellipse minimalen und der eingeschriebenen Ellipse maximalen Flächeninhalts (kurz: Umellipse und Inellipse) eines ebenen konvexen Bereichs. Entsprechende Ergebnisse für Bereiche mit Mittelpunkt hat der Verf. schon in einer früheren Arbeit erhalten (vgl. dies. Zbl. 15, 367). Von den Resultaten seien die folgenden genannt: Die Umellipse und (im Gegensatz zum Inkreis) auch die Inellipse sind eindeutig bestimmt. Unter allen Bereichen gegebenen Inhalts hat das Dreieck und nur dieses die (dem Inhalt nach) größte Umellipse und die kleinste Inellipse. Ferner gelangt der Verf. zu einer Charakterisierung der Um- und Inellipse eines gegebenen Bereichs durch den Kontakt, d. h. die Gesamtheit der gemeinsamen Randpunkte und Stützgeraden von Ellipse und Bereich, sowie zu einem vollständigen Überblick über diejenigen Bereiche, für welche eine gegebene Ellipse Um- oder Inellipse ist. Die Beweise sind z. T. nicht kurz, verwenden aber nur elementare Hilfsmittel.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Robinson, R. M.: Note on convex regions on the sphere. Bull. Amer. Math. Soc. 44, 115—116 (1938).

Es sei  $G$  ein sphärisch-konvexer Bereich auf der Einheitskugel  $\Omega$  (also speziell in einer Halbkugel enthalten) und  $G'$  der zu  $G$  diametrale Bereich; ferner sei  $G_1$  der Bereich  $\Omega - G - G'$ . Dann enthält  $G$  oder  $G_1$  einen Kreis vom sphärischen Radius  $\arctg(\sqrt{3}/2)$ , und diese Zahl kann durch keine größere Konstante ersetzt werden.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Auerbach, H.: Sur un problème de M. Ulam concernant l'équilibre des corps flottants. Studia Math. 7, 121—142 (1938).

Ulam hat die Aufgabe gestellt zu entscheiden, ob es einen nichtkugelförmigen homogenen Körper mit gegebenem spezifischem Gewicht  $\mu$  gibt, der in Wasser in jeder mit dem archimedischen Prinzip verträglichen Lage im Gleichgewicht schwimmt. Es läuft dies darauf hinaus, die homogenen Körper zu finden, bei denen die zu  $\mu$  gehörige Auftriebsfläche eine Kugel mit dem Schwerpunkt als Mittelpunkt ist. Verf. behandelt das analoge ebene Problem, den Querschnitt eines homogenen Zylinders so zu bestimmen, daß der Zylinder in allen mit dem archimedischen Prinzip verträglichen Lagen, bei denen die Erzeugenden der Wasseroberfläche parallel sind, im Gleichgewicht schwimmt. Beschränkt man sich wie der Verf. auf konvexe Zylinder, so kann die Aufgabe auch so formuliert werden: Es sei  $\mu$  mit  $0 < \mu < 1$  gegeben. Man soll die ebenen konvexen Bereiche mit der folgenden Eigenschaft bestimmen: Ist  $F$  der Inhalt eines Bereichs, und schneidet man auf alle möglichen Weisen durch Sehnen Bereiche vom Inhalt  $\mu F$  ab, so soll der Ort der Schwerpunkte dieser abgeschnittenen Bereiche ein Kreis um den Schwerpunkt des ursprünglichen Bereichs sein. Verf. zeigt, daß die Randkurven dieser „Bereiche indifferenten Gleichgewichts“ differenzierbar sind, daß die genannten Sehnen konstante Länge haben und von der Kurve Bögen konstanter Länge abschneiden, ferner daß eine solche Sehne mit den beiden Tangenten in ihren Endpunkten gleiche Winkel einschließt. Umgekehrt gilt: Hat eine konvexe

Kurve die Eigenschaft, daß die Sehnen einer gegebenen konstanten Länge Bögen konstanter Länge abschneiden, so ist sie eine Kurve indifferenten Gleichgewichts. Damit ist die Aufgabe auf eine schon früher (wenn auch noch nicht abschließend) behandelte zurückgeführt (vgl. insbes. Salkowski, dies. Zbl. 10, 77, ferner Gericke, dies. Zbl. 12, 119). Erschöpfend wird hier der Fall  $\mu = \frac{1}{2}$  behandelt. Es handelt sich dann um die schon von Zindler [Mh. Math. Phys 31, 25—57 (1921)] untersuchten, vom Verf. Z-Kurven genannten Kurven, bei denen alle den Inhalt halbierenden Sehnen auch den Umfang halbieren. Insbesondere hat Zindler schon die Existenz nicht-kreisförmiger Z-Kurven nachgewiesen. Verf. bestimmt nun alle Z-Kurven auf folgende Weise: Es seien  $u$  der Winkel, den die variable, den Inhalt halbierende Sehne mit einer festen Richtung bildet, und  $\vartheta(u)$  der Winkel zwischen dieser Sehne und der Tangente in einem ihrer Endpunkte. Dann werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür aufgestellt, daß die Funktion  $\vartheta(u)$  in der angegebenen Weise zu einer Z-Kurve gehört. Der Beweis operiert mit der Fourierentwicklung von  $\vartheta(u)$ . Schließlich wird ein bemerkenswerter Zusammenhang zwischen den Z-Kurven und den Kurven konstanter Breite nachgewiesen: Bewegt sich ein Quadrat so in seiner Ebene, daß die eine Diagonale stets inhaltshalbierende Sehne einer Z-Kurve ist, so fällt die andere Diagonale stets mit der Doppelnormalen einer Kurve konstanter Breite zusammen.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Santaló Sors, Luis A.: Integralgeometrie 7. Neue Anwendungen des Begriffs des kinematischen Maßes in der Ebene und im Raume. Rev. Acad. Ci. exact. Madrid 33, 3—50 (1936) [Spanisch].

Es wird die Integralgeometrie in der ursprünglichen, von Crofton eingeschlagenen Richtung weitergeführt, d. h. es werden Einzelprobleme insbesondere über geometrische Wahrscheinlichkeiten gelöst. Während Crofton nur Punkt-, Geraden- und Ebenendichte verwendet hatte, zieht Verf. wie schon in früheren Arbeiten (vgl. dies. Zbl. 14, 125) in erster Linie die kinematische Dichte heran. Dadurch wird es möglich, Mengen kongruenter Figuren, die weniger einfach sind als die von Crofton betrachteten, zu messen: z. B. Strecken derselben Länge, Winkel derselben Größe, Parallelstreifen derselben Breite usw. Insbesondere handelt es sich um die Mengen derjenigen Lagen einer solchen Figur, in denen sie eine gegebene (meistens, jedoch nicht immer als konvex vorausgesetzte) Kurve oder Fläche trifft. Man wird so auf Integralrelationen geführt, die die Maße der Figurenmengen mit den Invarianten der Kurven oder Flächen verknüpfen. Die zahlreichen, größtenteils neuen Ergebnisse können hier nicht im einzelnen wiedergegeben werden.

W. Fenchel (Kopenhagen).

### Topologie:

Bol, G.: Über eine kombinatorische Frage. Abh. math. Semin. Hansische Univ. 12, 242—245 (1938).

Another proof is given of the fact that there are exactly  $n^{n-2}$  trees joining  $n$  given vertices.

Whitney (Cambridge, Mass.).

Choquet, Gustave: Étude de certains réseaux de routes. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 310—313 (1938).

Given  $n$  towns in the plane, highway systems of minimum possible length joining them are considered, and some elementary properties are given.

Whitney.

Fröhlich, W.: Beiträge zur Theorie der Zöpfe. I. Über eine besondere Klasse von Zöpfen. Math. Ann. 115, 412—434 (1938).

Es werden dieselben speziellen Zöpfe wie in der dies. Zbl. 14, 280 referierten Arbeit betrachtet und mit ähnlichen geometrischen Methoden wieder das Transformationsproblem für diese Zöpfe behandelt. Es ergibt sich, daß bei den ausgewählten Erzeugenden sich die Exponenten der Potenzprodukte bei Transformationen nur um  $\pm 1$  ändern können.

K. Reidemeister (Marburg a. d. L.).



**Terasaka, Hidetaka:** Topologische Abbildungen und Kurvensysteme in  $R_n$ . Jap. J. Math. 14, 1—13 (1937).

Theorems: A euclidean  $R^n$  can not be filled with a regular family [Whitney, Ann. of Math. 34 (1933); this Zbl. 6, 371] of simple closed curves;  $R^n$  can however, when  $n \geq 3$ , be filled with a family of simple closed curves such that just one curve passes thru each point. For  $n \geq 3$ ,  $R^n$  can be filled with a regular family of curves each of which is a simple closed curve or a bounded topological image of a euclidean line. For  $n \geq 3$  there exist bounded topological transformations of  $R_n$  into itself without fixed points. — Let  $t$  be an orientation preserving topological transformation of  $R^2$  into itself such that the segment  $AB$  is never parallel to  $tAtB$ . The angle  $(AB, tAtB)$  measured relative to a suitable positive direction is always between 0 and  $\pi$ . If there is an  $\varepsilon > 0$  such that  $\varepsilon < (AB, tAtB)$  for every  $A, B$ , then there is at least one fixed point. —  $R^3$  can be filled with a family  $F$  of straight lines such that exactly one line passes thru each point, and no two are parallel. For every such  $F$  there is a plane which meets each line in a single point. *Smith* (New York).

**Hall, D. W., and G. E. Schweigert:** Non- $n$ -alternating transformations. Duke math. J. 3, 623—626 (1937).

A continuous transformation  $T(A) = B$  is called non- $n$ -alternating provided that for any two points  $x$  and  $y$  of  $B$ , there does not exist a set of at most  $n$  points in  $A - T^{-1}(x)$  which separates two points of  $T^{-1}(y)$  in  $A - T^{-1}(x)$ . For  $n = 0$  this is the non-alternating transformation studied by the reviewer [see Amer. J. Math. 56, 294—302 (1934); this Zbl. 9, 88]. If  $A$  and  $B$  are compact, it is shown that  $T$  is non- $n$ -alternating if and only if it is non-alternating on the complement of every subset of  $A$  containing at most  $n$  points. Furthermore, if  $A$  is separated between any pair of its points by some set of at most  $n + 1$  points,  $B$  is non-degenerate and  $T(A) = B$  is non- $n$ -alternating ( $n > 1$ ), then  $T$  is necessarily a homeomorphism. An example is given of a regular curve mapping under a non-alternating transformation into a curve which is not regular-indeed, not even hereditarily locally connected.

*G. T. Whyburn* (Virginia).

**Lefschetz, S.:** On the fixed point formula. Ann. of Math., II. s. 38, 819—822 (1937).

An elementary proof of the author's theorem that a continuous single-valued transformation  $T$  of a compact metric locally connected space into itself leaves fixed at least one point if  $\theta = \sum (-1)^p \text{trace } y_p \neq 0$ , where  $y_p$  is the transformation matrix for a  $p$ -dimensional homology basis with the rational numbers as a coefficient field. The situation is referred to an approximating simplicial complex  $\Phi$  in which  $T$  induces a transformation carrying simplexes into simplexes;  $\theta$  can then be replaced by a similar expression involving the transformation matrices for the simplexes of  $\Phi$ .

*P. A. Smith* (New York).

**Zaremba, Stanislas Christian:** Sur l'indice de Kronecker. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 476—477 (1938).

Hinweis auf die Möglichkeit, die Kroneckersche Charakteristik  $i$  eines Vektorfeldes  $C$ , das auf der im  $R^{n+1}$  gelegenen Sphäre  $S^n$  angebracht ist und dort keine Singularität besitzt, folgendermaßen zu bestimmen: Man projiziere  $C$  normal auf  $S^n$ ; es entsteht ein Tangentenfeld  $T$  von  $S^n$ , das Singularitäten an den Stellen hat, an denen  $C$  normal auf  $S^n$  steht;  $q$  sei die Summe der Indizes derjenigen Singularitäten von  $T$ , die von inneren Normalen der  $S^n$  herrühren; dann ist  $i = 1 - q$ . *H. Hopf*.

**Freudenthal, Hans:** Über die Klassen der Sphärenabbildungen. I. Große Dimensionen. Compositio Math. 5, 299—314 (1937).

Let  $S^d$  be a  $d$ -sphere and let  $(d^e)$  denote the homotopy group  $\pi_e(S^d)$  [Hurewicz, Proc. Akad. Amsterdam 38, 112—119 (1935); this Zbl. 10, 378]. The elements of  $(d^e)$  are essentially the classes of continuous representations of  $S^e$  on  $S^d$ . A homomorphic mapping  $\mathfrak{G}$  of  $(d^e)$  into a subgroup of  $(d + 1^{e+1})$  is defined as follows: if  $f \in (d^e)$  so that  $f(S^e) \subset S^d$ , then, regarding  $S^e, S^d$  as equatorial spheres of  $S^{e+1}, S^{d+1}$ , let  $f$  be

extended over  $S^{e+1}$  in such a way that the image of the northern (southern) hemisphere of  $S^{e+1}$  will be in the northern (southern) hemisphere of  $S^{d+1}$ . In this way there is obtained an  $\mathfrak{E}f \in (d+1^{e+1})$ . Let  $k = e - d$ . For  $d \geq k+1$ , the Hopf invariants [Math. Ann. **104**, 637—665 (1931); this Zbl. **1**, 407] of the representations  $f(S^e) \subset S^d$  define a homomorphic mapping:  $c(d^e) \subset (d^{k+1})$ . For  $d = k+1$   $c$  can be thought of as a homomorphic mapping of  $(d^e)$  onto the additive group of integers. Let  $(d^e)_0$  be the subgroup of  $(d^e)$  which is mapped by  $c$  into 0; for  $d > k+1$ ,  $(d^e)_0 = (d^e)$ . The author studies the relations between  $\mathfrak{E}$  and  $c$  and shows that (I)  $\mathfrak{E}(d^e) = (d+1^{e+1})_0$  for  $d \geq k$ ; (II) when applied to  $(d^e)$ ,  $\mathfrak{E}$  maps  $(d^e)_0$  isomorphically under certain conditions, for example when  $d > k+1$ , or when  $d$  is even and  $= k+1$ ; (III) if  $d = k+1$  is even and if  $g \in (d^e)$  and  $c(g)$  is odd, then  $\mathfrak{E}g = 0$ ; but for every  $c \in c(d^e)$  there exists an  $h \in (d^e)$  such that  $c(h) = 2c$ ,  $\mathfrak{E}h = 0$ . Among the immediate consequences are these special results:  $(d^{e+1})$  consists of two elements when  $d \geq 3$ ;  $(5^8)$  and  $(9^{11})$  contain at least two elements;  $(d^{d+3})$  for  $d \geq 4$  and  $(d^{d+7})$  for  $d \geq 8$  contain at least two elements. *Smith* (New York).

**Freudenthal, Hans:** Zwei Bemerkungen zur Homologietheorie. *Compositio Math.* **5**, 315—318 (1937).

The product [Alexander, Čech, Whitney; see for example the author's paper *Ann. of Math.* **38**, 647—655 (1937); this Zbl. **17**, 231] of elements in the dual homology groups — also called upper homology groups, co-homology groups — requires for its construction a definitely chosen ordering of the vertices of the given complex. The first part of the present note gives a short simple proof that the products are independent of the ordering chosen. The second part contains a proof of the following theorem. Let  $P$  be a closed oriented simplicial pseudo-manifold and  $Q$  a simplicial subdivision of  $P$ . Let  $\mathfrak{z}$  be the operator which carries an arbitrary  $h$ -simplex  $u^h$  of  $Q$  into that simplex  $u^h \mathfrak{z}$  of  $P$  whose subdivision contains  $u^h$  with the coefficient  $+1$ . Let  $P'$ ,  $Q'$  be the barycentric subdivisions of  $P$ ,  $Q$  and let  $\mathfrak{b}$  be the operator which carries simplexes into their dual cells. Then there exists a simplicial transformation  $\mathfrak{f}$  of  $Q$  into  $P$  such that  $\mathfrak{f} \mathfrak{b} u^h = \mathfrak{b}(u^h \mathfrak{z})$ . *Smith* (New York).

**Kurepa, Georges:** Un critère de distanciabilité. *Mathematica, Cluj* **13**, 59—65 (1937).

Eine Charakterisierung der Fréchet'schen  $D$ - bzw.  $E$ -Räume durch Bedingungssysteme von der Art, daß allein in eine dieser Bedingungen fünf andere eingeschaltet werden. Verf. stellt diese Charakterisierung anderen bekannten Definitionen als eine wesentlich verschiedene entgegen und betont, daß sie innerlich und topologisch ist, jedoch ohne Angabe des neuen Sinnes dieser Worte. Andererseits wird sie vom Verf. als identisch mit einem Satze aus seiner früheren Abhandlung (dies. Zbl. **15**, 396) anerkannt. Analoge Charakterisierungen sollen für  $D_\alpha$ - bzw.  $E_\alpha$ -Räume (wo  $D_0 = D$  bzw.  $E_0 = E$ ) mit beliebigem ordinalzahligen Index  $\alpha$  (vgl. dies. Zbl. **17**, 158) gelten.

*B. Knaster* (Warszawa).

## Mechanik.

**Barbilian, D.:** Eine Axiomatisierung der klassischen Mechanik. *C. R. Acad. Sci. Roum.* **2**, 9—16 (1937).

Die Galileigruppe der klassischen Mechanik, aber mit festgehaltenem Zeitnullpunkt ( $t' = t$ ), ist isomorph einer Gruppe von gebrochen linearen Substitutionen

$$Z = (CZ + D)^{-1}(AZ + B)$$

aus dem hyperkomplexen System  $(1, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$  mit  $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon_2^2 = 0$ . Deutet man die  $Z$  als Punkte auf einer „triadischen Kugel“, so kann man ein Axiomensystem für die Geometrie auf dieser Kugel aufstellen. Dieses ergibt dann durch Übertragung ein Axiomensystem für die klassische Mechanik, in der als Grundbegriff die gleichförmige,



parallele Speerbewegung, kurz „Progreß“ genannt, auftritt. Die Einordnung der Begriffe Zeit und Kraft in diese axiomatische Mechanik wird dann noch kurz besprochen.  
*van der Waerden* (Leipzig).

**Hadamard, Jacques:** *L'homogénéité en mécanique.* Bull. Sci. math., II. s. 62, 6—10 (1938).

With reference to Picard's note on this subject in Bull. Sci. math. 61 (1937), this Zbl. 16, 378, Hadamard points out that the number representing a mechanical quantity may vary 1. with the state of the moving system, 2. with the choice of the units adopted: independence with respect to the state of the system is one thing, independence with respect to the units adopted is another, which is not a necessary consequence of the former. Examples are given showing the danger of neglecting this consideration in attempts to derive formulae by use of the principle of homogeneity.

*Whittaker* (Edinburgh).

**Picard, Émile:** *Remarques sur l'homogénéité en mécanique (à la suite de la lettre de M. Hadamard).* Bull. Sci. math., II. s. 62, 10—12 (1938).

The author comments on the point raised by Hadamard (see the preceding note) and discusses, as a fresh example, the dependence of the frequency of an organ-pipe on its length, under different assumptions.

*Whittaker* (Edinburgh).

**Agostinelli, Cataldo:** *Sui sistemi dinamici corrispondenti.* Mem. Ist. Lombardo Sci. 23, 191—240 (1937).

The most general case of a pair of dynamical systems, corresponding in the sense of Painlevé, is here treated. The paper purports to establish necessary and sufficient conditions in the form of a system of partial differential equations that two systems be corresponding. These equations are then integrated in a general manner thus presumably determining all types of corresponding systems (see this Zbl. 17, 282). — The details of the actual treatment of this important problem seem obscure. For example on p. 196 the argument reads as if

$$\frac{d \log f}{dt} \Big|_{t=t_0} = \frac{1}{f_0} \frac{df_0}{dt} \quad \text{instead of} \quad \frac{1}{f_0} \left[ \frac{df_0}{dt} + f_1 \right],$$

where  $f(x, x', t) = f_0(x, x', t_0) + f_1(x, x', t_0)(t - t_0) + \dots$ , and the  $(x, x')$  is regarded as depending on  $t$ . Again on p. 212 it would seem that certain integrability conditions involving only the coefficients of the original quadratic form for  $ds^2$  would have to

be satisfied before one could write  $ds^2 = \sum_{r=1}^n H_r^2 dx_r$ . *D. C. Lewis* (Ithaca).

**Agostinelli, Cataldo:** *Sulle equazioni di Hamilton-Jacobi integrabili per separazione di variabili.* Atti Ist. Veneto Sci. etc. 96, 151—161 (1937).

All Hamiltonian systems (corresponding to a dynamical problem with constraints independent of the time) which can be integrated by separation of variables are here determined. The systems treated by Liouville, Stäckel, Levi-Civita and Bur-gatti appear as special cases.

*D. C. Lewis* (Ithaca, N.Y., U.S.A.).

**Lazzarino, Orazio:** *Teoria sintetica dell'equivalenza fra i sistemi di equazioni differenziali di Euler-Poisson e di Hess-Schiff nella teoria dei giroscopi rigidi pesanti e studio dei casi singolari per i quali l'equivalenza non sussiste. I.* Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 7, 97—107 (1938).

Criteria for the equivalence described in the title are obtained in terms of the vanishing or non-vanishing of the time derivatives of the invariants of Hess. *Lewis*.

**De Angeli, Erminia:** *Su alcuni casi integrabili di movimento di un giroscopio asimmetrico pesante.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 25, 699—703 (1937).

R. Fabbri hat in zwei Noten (Zbl. Mech. 2, 98 u. 193) eine Klasse von partikulären Lösungen des Problems der Bewegung eines schweren, unsymmetrischen Kreisels um einen festen Punkt untersucht, bei dem der Schwerpunkt auf einer der Hauptträgheitsachsen liegt, unter der Annahme besonderer Beziehungen zwischen den Anfangsbedingungen, d. h. geeigneter, bestimmter Werte der Energiekonstanten u. dgl.

Die Verf. vervollständigt zwei von den dort gegebenen Lösungen durch Zurückführung auf elliptische Funktionen in der Jacobischen Form. *Th. Pöschl* (Karlsruhe). °°

### **Himmelsmechanik, Gleichgewichtsfiguren:**

● Koebeke, Fryderyk: On some astronomical applications of Cracovians. (Poznańskie Towarz. Przyjaciół Nauk Ser. A, Tom 4, Nr 3.) Poznań: 1937. 31 S. [Polnisch].

The first part of this paper contains a short review of theoretical properties and applications of the, so called, Cracovian matrices, followed by a bibliographic index. The second part deals with some new applications. And so: 1. The direct calculation of topocentric places of the moon appears to be more simple than the usual form of reduction. 2. Further, formulae for calculating the effect of perturbations in the elements of an orbit are given. The angular elements  $\omega$ ,  $\Omega$ ,  $i$  being replaced by Gibbs constants. 3. Using Cracovians it was possible to simplify Andoyer's method of calculating ephemerides of Jupiter's satellites. Tables to facilitate the computations are given. 4. At last Cracovians are used to perform reductions of points of cometary tails to the plane of the orbit. The gain in computation work compared with the usual logarithmic formulae is always illustrated by numerical examples. *Autoreferat.*

Rabe, W.: Über Bahnbestimmung und Bahnverbesserung visueller Doppelsterne aus kurzen Bahnbögen. *Astron. Nachr.* 265, 177—208 (1938).

Verf. gibt eine Methode an, aus kurzen Bahnbögen eine vorläufige Bahn zu bestimmen, ähnlich der Laplaceschen Methode der Planetenbahnbestimmung. Da hierbei Differentialquotienten bis zur vierten Ordnung gebraucht werden, sind die Resultate recht unsicher. Um die so erhaltenen vorläufigen Bahnen zu verbessern, gibt er ein Verbesserungsverfahren an. Bei diesem wird  $\dot{r}/r$  (für den Ausgangspunkt, den man zweckmäßig in die Mitte des Beobachtungszeitraumes legt) solange variiert, bis die Summe der Fehler der beiden äußersten Positionswinkel verschwindet. Dann wird  $r$  solange variiert, bis die Differenz der äußersten Positionswinkel verschwindet. Damit sind in der Regel sämtliche Positionswinkel gut dargestellt. Schließlich gibt er noch als Beispiele Castor und  $\Sigma$  3062. *G. Schrutka* (Wien).

Rein, Natalie: Sur une forme des équations différentielles du problème restreint elliptique. *C. R. Acad. Sci., Paris* 206, 321—322 (1938).

Berichtigung eines Rechenfehlers in einer Note von Nechvile [*C. R. Acad. Sci., Paris* 182, 310 (1926)]. *Wintner* (Baltimore).

Gardedieu, Alex: Sur la figure d'équilibre d'une masse fluide hétérogène en rotation. *Mathesis* 51, Nr 5/6, Suppl. 1—47 (1937).

Conditions are found for the permanence of form of a heterogeneous ellipsoid in the two cases where the surfaces of equal density are either homothetic or confocal ellipsoids of revolution. It is possible to compute upper and lower limits for the eccentricities in terms of the angular momentum, the total mass and the law of densities. In the case of homogeneous ellipsoids these two limits coincide and the results reduce to the classical results on the ellipsoids of Maclaurin. *D. C. Lewis.*

Evrard, L.: Figure annulaire d'équilibre d'une masse fluide, homogène, en rotation. *Mathesis* 52, 9—13 (1938).

Verf. gibt Schranken für Winkelgeschwindigkeit bzw. Impulsmoment, bis zu denen er je genau eine Gleichgewichtsfigur einer ringförmigen rotierenden gravitierenden Flüssigkeitsmasse ermitteln kann, die unter dem Einfluß eines Zentralkörpers steht. In den Rechnungen wird, gestützt allein auf die Betrachtungen von S. Kowalewski und Frl. Klumpke, von vornherein nur bis zu den Gliedern vierter Ordnung gegangen. Demgegenüber liefert die exakte Lichtensteinsche Theorie [vgl. V. Garten, *Math. Z.* 35, 684—745 (1932); insbes. III. Teil; dies. Zbl. 5, 223] noch eine weitere von der Winkelgeschwindigkeit abhängige lineare Reihe stark abgeplatteter Ringkörper. Es wäre wichtig, die Lichtensteinsche Theorie auch auf unabhängig variables Impulsmoment auszudehnen. *E. Hölder* (Leipzig).



Armellini, G.: I problemi fondamentali della cosmogonia e la legge di Newton. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 26, 209—215 (1937).

Plausible physical reasons are introduced for modifying Newton's law of gravitation to read (in the usual notation) as follows:

$$F = -f \left( 1 + \varepsilon \frac{dr}{dt} \right) \frac{m m'}{r^2},$$

where  $\varepsilon$  is an extremely small positive constant. Some of the more immediate mathematical consequences of this hypothesis are examined and shown to correspond with known astronomical facts, e.g. the prevalence of nearly circular planetary orbits.

D. C. Lewis (Ithaca, N.Y., U.S.A.).

## Mathematische Physik.

### Elektrodynamik:

Pétiau, Gérard: Sur la représentation matricielle des équations de Maxwell. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 1710—1713 (1937).

Heatley, A. H.: Collector theory for ions with Maxwellian and drift velocities. Physic. Rev., II. s. 52, 235—238 (1937).

Kritik und Verbesserung der Kollektortheorie von Mott-Smith und Langmuir; es handelt sich um die Wirkungsweise einer zylindrischen Elektrode (mit eigenem Stromkreis) bei der Untersuchung von Gasentladungen. Wenn der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung der Gasionen eine gemeinsame „Triftgeschwindigkeit“ überlagert ist, so verzerrt sich das Raumladungsfeld um den Kollektor. *Bechert.*

Niessen, K. F.: Eine Verschärfung der verbesserten Sommerfeldschen Fortpflanzungsformel für drahtlose Wellen zur Ausbreitung ihres Gültigkeitsgebietes nach kleineren Abständen. Ann. Physik, V. F. 29, 569—584 (1937).

The work of a previous paper (this Zbl. 16, 165) is here extended, with similar mathematical technique, to the case of arbitrary ground constants, with a greater range of “numerical distance”. Numerical examples and calculated curves are given.

M. Slow-Taylor (Felixstowe).

Niessen, K. F.: Zur Entscheidung zwischen den beiden Sommerfeldschen Formeln für die Fortpflanzung von drahtlosen Wellen. Ann. Physik, V. F. 29, 585—596 (1937).

It is shown that the formula given by Sommerfeld in 1926 for the radiation from a vertical dipole on a plane earth is the correct one. The error in Sommerfeld's 1909 calculation is shown to lie in the attribution of the wrong sign to a square-root quantity along part of a path of integration in the complex plane. *M. Slow-Taylor.*

Majumdar, R. C.: Die Theorie der Ionosphäre. I. Z. Physik 107, 599—622 (1937).

Verf. betrachtet eine vorgegebene Verteilung von Elektronen in einem beliebig verteilten System von Massenteilchen (Ionen, neutrale Atome, Moleküle) und untersucht die Veränderung dieser Verteilungsfunktion der Elektronen unter der Wirkung eines konstanten magnetischen und eines einfach periodisch veränderlichen elektrischen Feldes. Hieraus werden die physikalischen Eigenschaften dieses Systems: Leitfähigkeit, Dispersion, Absorption, quantenmechanisch berechnet. Im Abschn. 2 wendet er diese Ergebnisse auf das spezielle Problem der Dispersion, Absorption und Polarisation einer ebenen fortschreitenden elektromagnetischen Welle an. Die Formeln werden diskutiert, und es wird gezeigt, daß die von Appleton, Hartree und Goldstein abgeleiteten Näherungen in den Formeln des Verf. enthalten sind. Bei der Betrachtung einer aus Elektronen und Ionen bestehenden Ionosphäre wird eine Coulombsche Wechselwirkung zwischen den Korpuskeln angenommen. Die Ergebnisse werden numerisch ausgewertet. Die wirklich in der Ionosphäre auftretenden Verhältnisse werden auf Grund der Ergebnisse anderer Forscher diskutiert, und hieraus werden Größenordnungen für die betrachteten Effekte abgeleitet. *M. J. O. Strutt (Eindhoven).*

**Optik:**

**Weigle, J.:** *Théorie de la propagation de la lumière dans un milieu atomiquement stratifié.* *Helv. phys. Acta* **11**, 159—180 (1938).

Theorie der Lichtausbreitung ( $\lambda \approx 10^{-5}$  cm) in einem Medium, dessen Dielektrizitätskonstante eine vorgegebene periodische Funktion ist (Periode  $\Lambda \approx 10^{-8}$  cm). Es wird nur der eindimensionale Fall behandelt. Bechert (Gießen).

**Garavito Armero, Julio:** *Das Paradoxon der mathematischen Optik.* *Rev. Acad. Colomb. Ci. exact. etc.* **1**, 242—256 (1937) [Spanisch].

First the author again describes the experimental facts of optics: (1) Light propagates in a straight line, (2) Refraction Law, (3) Light velocity about 3000 km/sec, (4) Aberration of light, (5) Astronomical refraction, independent of the speed of light and earth, (6) Michelson Morley experiment, (7) Fizeau's experiment, (8) Light is a form of energy. — The paradox of optics consists in the apparent incompatibility of Fizeau's and Michelson's experiment. The question is according to the author whether we have partial or total retardation of light. — In Chapter II the author discusses the differential equations of uniform rectilinear propagation. He claims that the mathematical useful conception of a plane wave has no physical significance (why? light source in the focus of an optical instrument) and only considers the radial solution, that means spherical waves. The third chapter deals again with astronomical aberration. The fourth chapter gives the author's arguments against the assumption of the wave nature of light, which are not understandable to the reviewer. In the fifth chapter the author tries to introduce polarization interference, etc., into his theory by specializing the propagated quantity  $u$ . The next chapter repeats formulae of the second part containing propagation of light in moved bodies, derivation of refraction and reflection law and discussion of Fizeau's experiment. — The explicative note of the director of the Observatory added to the paper claims that Fizeau's experiment has been misinterpreted before Garavito. Herzberger (Rochester).

**Brüche, E., und A. Recknagel:** Über die „Phasenfokussierung“ bei der Elektronenbewegung in schnellveränderlichen elektrischen Feldern. *Z. Physik* **108**, 459—482 (1938).

Es handelt sich um folgendes Problem: Eine Gruppe von Elektronen verschiedener Geschwindigkeit gehe zu einer bestimmten Zeit von einem Punkte aus. Diese Gruppe wird sich wegen der verschiedenen Geschwindigkeit immer mehr und mehr auseinanderziehen. Fliegen die Elektronen nun durch den Bereich eines elektromagnetischen Wechselfeldes, so werden sie dort zu verschiedenen Zeiten ankommen, also durch verschieden starke Feldstärken beeinflusst werden, also eine verschieden starke Änderung ihrer Geschwindigkeit erfahren. Unter bestimmten Bedingungen ist es möglich, den Elektronen durch ein solches Wechselfeld solche Geschwindigkeiten zu erteilen, daß die ursprünglich schnellsten verlangsamt, die ursprünglich langsamsten beschleunigt werden, derart, daß die Gruppe von Elektronen, die sich bis zum Erreichen des Wechselfeldes auseinandergezogen hatte, nach dem Durchlaufen dieses Feldes in ihrer Ausdehnung sich wieder verringert, also zusammenschrumpft, so daß die Elektronen einen in bestimmter Entfernung vom Wechselfelde, der elektrischen Linse, liegenden Punkt gleichzeitig durchlaufen. Diesen Punkt bezeichnen die Verf. als „Treffpunkt“, falls zwischen der Phase des Wechselfeldes und der Ankunft der Elektronengruppe im Wechselfeld die Beziehung besteht, daß die Elektronen mittlerer Geschwindigkeit das Feld zur Zeit der Phase Null durchlaufen, also unbeeinflusst bleiben. Ist dies nicht der Fall, so bezeichnen sie den betreffenden Punkt, durch den die Elektronengruppe gleichzeitig — zu einer bestimmten gleichfalls berechenbaren Zeit — hindurchfliegt, als „Zielpunkt“, der dem „Startpunkt“ konjugiert ist. Die Verf. zeigen, daß sich die auftretenden Erscheinungen theoretisch in weitgehender Analogie zu den Erscheinungen der optischen Abbildung behandeln lassen, indem sie das Wechselfeld als „Phasenlinse“ bezeichnen, da es hier wesentlich auf die Phase des Feldes im Augenblick des Durchgangs der Elektronen ankommt. Sie können die Analogiebetrachtungen



weitgehend durchführen. Auch auf „Fehlerbetrachtungen“, auf Phasenfokussierung bei mehreren in bestimmtem Abstand hintereinander liegenden Feldschichten sowie auf ausgedehnte Wechselfelder lassen sich — wie die Verff. zeigen — die Formeln der Theorie der geometrischen Elektronenoptik übertragen. *Picht* (Babelsberg).

### Quantentheorie:

**Ostertag, Hermann:** Ein neuer physikalischer Raum. *Z. Physik* 108, 200—203 (1938).

**Jordan, P.:** Bemerkung zu der Arbeit von H. Ostertag: „Ein neuer physikalischer Raum.“ *Z. Physik* 108, 544 (1938).

**Fock, V.:** Die Eigenzeit in der klassischen und in der Quantenmechanik. *Physik. Z. Sowjet.* 12, 404—425 (1937).

Durch Einführung einer der Eigenzeit entsprechenden Variablen ergibt sich eine Integrationsmethode für die Diracsche Wellengleichung, welche, auf das Cauchyproblem angewandt, zu einer Bestimmung der Riemannschen Funktion führt und die außerdem zu einer vereinfachten Anwendung der Wentzel-Brillouinschen Näherungsmethode Anlaß gibt. Als Beispiel wird der Fall eines konstanten elektromagnetischen Feldes behandelt, und zuletzt wird die Beziehung der für das Positronenproblem bedeutsamen Dichtematrix zur Riemannschen Funktion besprochen. *O. Klein.*

**Born, M.:** *Théorie non-linéaire du champ électromagnétique.* *Ann. Inst. H. Poincaré* 7, 155—265 (1937).

Systematische Übersicht der vom Verf. und seinen Mitarbeitern in den letzten Jahren entwickelten Theorie und ihrer Stellung gegenüber den grundsätzlichen Problemen der Elektrodynamik, sowohl in klassischer als auch quantenmechanischer Form. Inhalt: Einleitende Hinweise auf die schon bei J. J. Thomson auftretende Idee, die Masse als elektrodynamischen Ursprungs anzusehen und dementsprechend eine bestimmte Struktur des Elektrons, mit endlichem Radius, anzunehmen. Kap. I: Lagrangesche Gleichungen für die Dynamik eines Kontinuums (Feld) und Funktionalkalkül; nach der Darstellungsweise von M. P. Weiss. Ausführliche Erörterung der Mieschen Elektrodynamik und Elektronentheorie. Die Unmöglichkeit, das Problem im Sinne des Mieschen Programms zu lösen — d.h. derart, daß die Elektronen als singularitätenfreie Feldstellen angesehen werden, in welchen lediglich die approximative lineare Gestalt der Maxwell'schen Vakuum-Feldgleichungen versagt und durch exakte Berücksichtigung nichtlinearer Feldgleichungen zu ersetzen ist —, führt dazu, daß nur ein Ausweg übrigbleibt, nämlich der vom Verf. beschrittene: die Elektronen werden doch als Singularitäten eingeführt; die Nichtlinearität der vollständigen Feldgleichungen dient lediglich dazu, eine endlich bleibende Masse (elektromagnetischen Ursprungs) zu gewährleisten. Erörterung der verschiedenen als möglich in Betracht zu ziehenden Lagrange-funktionen des Feldes. Herleitung der Bewegungsgleichungen für die Elektronen. Kap. II: Quantenmechanik der Kontinua; Erörterung der Gesichtspunkte, die sich daraus für das Problem der Elektronenstruktur ergeben. Die Dirac-Heisenbergsche Löchertheorie und ihre Beziehungen zur nichtlinearen Elektrodynamik (Euler-Kokkel; Heisenberg; Polarisierung des Vakuums usw.). Ausblicke und Schlußbemerkungen.

*P. Jordan* (Rostock).

**Born, Max:** *Relativity and quantum theory.* *Nature, Lond.* 141, 327—328 (1938).

Vorläufige Mitteilung über einen Versuch, die bekannten grundsätzlichen Schwierigkeiten der Quantenelektrodynamik anzugreifen. Nachdem frühere Versuche, eine universelle Längskonstante — von der Größenordnung des „Elektronenradius“  $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ , also  $\approx 10^{-13}$  cm — einzuführen, an dem Nichtgelingen einer relativistisch invarianten Fassung dieses Gedankens gescheitert sind, versucht der Verf. einen Weg, der von vornherein Befriedigung der relativistischen Forderungen sicherstellt: Der Raum der den Ortskoordinaten kanonisch konjugierten Impulse wird als ein Riemannscher Raum

von endlichem Gesamtvolum angenommen. Nach Ansicht des Ref. wird hierdurch zwar die (vom Verf. noch nicht versuchte) Aufstellung einer Theorie der „Raumquantelung“ (die der Elementarlänge  $r_0$  irgendwie eine geometrisch ausgezeichnete Rolle zuweist) nicht entbehrlich gemacht. Jedoch wird jede künftige Theorie der Raumquantelung Folgerungen in der Art der Bornschen Ansätze ergeben müssen; der Versuch, diese Folgerungen auf direktem Wege genauer zu diskutieren, darf wohl sicherlich als sehr wichtig und erfolgversprechend angesehen werden. *P. Jordan.*

**Chraplywy, Z.:** Zum Potentialbegriff in der neuen Elektrodynamik. Bull. int. Acad. Polon. Sci. A 1937, 509—520.

Es werden die Korrekturen untersucht, welche sich aus der Bornschen nichtlinearen Elektrodynamik — und aus einigen der ähnlichen, abgeänderten Fassungen der nichtlinearen Elektrodynamik — für die Dublettkomponenten des H-Atompektrums ergeben. Diese Korrekturen sind (wie schon frühere Untersuchungen anderer Verfasser wahrscheinlich machten) sehr klein; für die Deutung einer gewissen zwischen Theorie und Experiment zur Zeit bestehenden Unstimmigkeit können sie infolge dieser Kleinheit nicht verwertet werden. *P. Jordan (Rostock).*

**Watson, W. H.:** The electron and limits to the precision of electromagnetic field specifications. Trans. Roy. Soc. Canada, III. s. 31, 47—55 (1937).

Es werden Ungenauigkeitsregeln für das elektromagnetische Feld diskutiert, welche von der Vorstellung ausgehend formuliert sind, daß die Elementarladung  $e$  für dies Feld eine ähnliche Bedeutung habe, wie  $h$  für die Mechanik. So wird der Quantenbedingung

$$\int p \, dq = n h$$

der Gaußsche Satz  $\iint (\mathfrak{E}_x \, dy \, dz + \mathfrak{E}_y \, dz \, dx + \mathfrak{E}_z \, dx \, dy) = n e$

an die Seite gestellt und daraus  $\Delta \mathfrak{E}_x \Delta(yz) \geq 2\pi e$ ,

$$e \Delta \mathfrak{E}_x \Delta(xt) \geq 2\pi e$$

geschlossen. Ausführliche Diskussion von Beispielen versucht diese Formulierung als sinngemäß zu erweisen. *P. Jordan (Rostock).*

**Kiveliovitch, Michel:** Les équations hydrodynamiques et les statistiques quantiques. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 981—983 (1938).

**Solomon, Jacques:** Remarques sur quelques progrès récents de la théorie du neutrino. II. J. Phys. Radium, VII. s. 8, 433—438 (1937).

Eine frühere Arbeit (dies. Zbl. 17, 285) fortsetzend wird gezeigt, daß eine verallgemeinerte Fermische Theorie, die gleichzeitig die Kernkräfte und die  $p$ -Emission umfaßt, denkbar ist, indem diese Probleme verschiedene Teile einer Wechselwirkungsmatrix bestimmen. *O. Klein (Stockholm).*

**Grönblom, B. O.:** Über die Abweichung der leichten Atomkerne vom Hartree-Modell. Acta Soc. Sci. Fennicae, N. s. A 2, Nr 9, 1—28 (1937).

Es wird die Energie der leichten Atomkerne  ${}^4\text{He}$  und  ${}^{16}\text{O}$  nach der Hartreemethode berechnet. Nach Diskussion der Natur und bekannter Ansätze der Kernkräfte (Wigner, Heisenberg, Majorana) sowie der bis jetzt herangezogenen Methoden zur Berechnung von Kernenergien und der besonderen Vorteile und Mängel der Hartreemethode wird die Berechnung der Energie von  ${}^4\text{He}$  und  ${}^{16}\text{O}$  (und des Deuterons) in folgender Weise durchgeführt: Es werden die Kräfte Neutron-Proton in Form von Majorana-Kräften angesetzt,  $V = -a e^{-b^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} M(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ . Die Kräfte Neutron-Neutron, Proton-Proton, mit Ausnahme der Coulombschen, werden vernachlässigt. In nullter Näherung werden sämtliche Teilchen in einem fiktiven Kernpotential  $V^{(0)} = \frac{1}{2} \frac{h^2 \alpha^2}{M} \sum_i \tau_i^2$

gedacht, das die zu benutzenden Oszillatoreigenfunktionen liefert und bei der späteren Störungsrechnung wieder abgezogen wird. Bei der Störungsrechnung erster Ordnung wird noch auf die Energie der Schwerpunktsbewegung und die Coulombsche Energie



Rücksicht genommen. Aus der so erhaltenen Energie erster Ordnung wird die Größe  $\alpha$  des fiktiven Hilfspotentials durch Minimumforderung festgelegt (als Funktion von  $a$  und  $b$  des Majoranapotentials). — Weiter wird nun eine Störungsrechnung zweiter Ordnung durchgeführt mit Hilfe von Matrizenelementen des fiktiven Potentials und der Schwerpunktsbewegung. Der Hauptteil der Arbeit ist der analytischen Berechnung dieser Matrizenelemente und dem Aufbau der Störungsenergie zweiter Ordnung aus ihnen gewidmet. Das Endergebnis wird für He- und O-Kern in Form von Potenzreihen mit numerischen Koeffizienten nach  $\gamma = \frac{b^2}{\alpha + 2b^2}$  angegeben. Die theoretischen Energiewerte von  ${}^2\text{H}$ ,  ${}^3\text{He}$  und  ${}^{16}\text{O}$  werden den bekannten Kernenergien gleichgesetzt. Für die drei Kerne erhält man somit unabhängige Beziehungen zwischen der Abfallskonstanten  $b^2$  und der Tiefe  $a$  des Potentials  $V$ , die untereinander verglichen werden können, und die graphisch angegeben werden. Die Heranziehung der Störungsenergie zweiter Ordnung hat zur Folge eine erheblich verbesserte Übereinstimmung zwischen den drei  $(a - b)$ -Kurven, verglichen mit entsprechenden Kurven erster Näherung. — Ein kleiner Rechenfehler S. 11, num. Faktor  $\frac{1}{4}$  statt  $\frac{3}{8}$ , beeinflusst (wie Verf. mitteilt) die Ergebnisse der Rechnung nicht merklich. Ein zweiter scheinbarer Fehler S. 15,  $\frac{2}{3}$  statt  $\frac{1}{6}$ , ist nur durch einen Druckfehler S. 12,  $-\frac{1}{16}$  statt  $-\frac{9}{16}$ , vorgetäuscht. Korrekturen werden vom Verf. in einem demnächst erscheinenden Aufsatz angegeben werden.

*Egil A. Hylleraas* (Blindern b. Oslo).

## Relativitätstheorie.

● **Dive, Pierre:** Le principe de relativité selon Poincaré et la mécanique invariante de **Le Roux**. Paris: Dunod 1937. 69 pag. Frs. 17.—.

Reprint in book form of a paper reviewed in this Zbl. 17, 236. *J. L. Synge*.

**Levi-Civita, Tullio:** Nuova impostazione elementare della relatività. Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 69—87 (1937).

The author's main purpose in giving this new formulation of relativity is to show clearly the precise point at which relativistic mechanics begins to depart from the classical theory.

*H. S. Ruse* (Southampton).

**Synge, J. L.:** Relativistic hydrodynamics. Proc. London Math. Soc., II. s. 43, 376—416 (1937).

This is a systematic development of a hydrodynamical theory in general relativity, analogous to classical hydrodynamics. It is found possible to divide the theory into kinematics (the geometry of a congruence of world-lines of flow in Riemannian space-time) and kinetics (the theory consequent on the introduction of the field equations, the actual treatment being based entirely on the equations of conservation). Part I (Introduction) is followed by Parts dealing respectively with Kinematics, Fluid Motion in general, Motion of a fluid possessing a pressure-density equation, and Fluid Motion in flat space-time. A remarkable result concerns the velocity of propagation of a small irrotational disturbance in a compressible fluid possessing a pressure-density equation: this velocity is found to tend to infinity as the fluid tends to incompressibility, a result which appears to indicate a lower limit to the compressibility of a compressible fluid, since it should not be possible to obtain a signal with a velocity exceeding that of light.

*Whittaker* (Edinburgh).

**Garcia, Godofredo:** Über die Ablenkung von Lichtstrahlen. Rev. Ci., Lima 38, Nr 420, 91—97 (1937) [Spanisch].

**Lichnerowicz, André:** Sur les singularités du  $ds^2$  extérieur. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 157—159 (1938).

Statement and outline proofs of the following theorems: (I) Every "meubleable" world-tube necessarily contains singularities of the external static field. (A world-tube is called "meubleable" by the author if, to the second order, the external static field

agrees along its surface with an internal field which is assumed to be static.) (II) If an external space-time  $ds^2 = e^{2\mu} d\sigma^2$  is conformal to a static orthogonal  $d\sigma^2$ , and is such that its spatial sections are asymptotically euclidean or are closed unbounded spaces, and if the second derivative of  $\mu$  with respect to the time is negative or zero, then the space-time cannot be regular everywhere without reducing locally to euclidean space.

*H. S. Ruse (Southampton).*

**Lichnerowicz, André:** *Espaces-temps extérieurs réguliers partout.* C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 313—315 (1938).

An extension of the second of the above theorems (see the prec. review) to a general class of space-times specified by non-orthogonal quadratic forms. *H. S. Ruse.*

**Oseen, C. W.:** *Contributions à la théorie de relativité. II.* Ark. Mat. Astron. Fys. **25 A**, Nr 31, 1—12 (1937).

The author is here concerned with axially symmetric solutions of Einstein's field equations for the interior of a fluid relatively at rest. He does not attempt to obtain the general solution, his stated aim being that of examining, and of giving as great a precision as possible to, the mathematical character of the problem. He assumes

$$ds^2 = e^{2\nu} dt^2 - e^{-2\lambda} \{e^{2\lambda} (dx_1^2 + dx_2^2) + r^2 dx_3^2\},$$

where  $\lambda, \nu, r$  are functions of  $x_1, x_2$ , and uses the field equations of Ghosh (this Zbl. **13**, 287), namely  $G_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} G = -8\pi (T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T)$ , which are deducible from, but not completely equivalent to, those of Einstein. One of the author's conclusions is that it is impossible to base the theory of gravitation on Ghosh's equations. The last section of the paper is devoted to a discussion of the Schwarzschild problem. (I. see this Zbl. **17**, 332.)

*H. S. Ruse (Southampton).*

**Oseen, C. W.:** *Bemerkungen zu der Theorie der Relativität, Kosmologie und Gravitation von Herrn E. A. Milne.* Ark. Mat. Astron. Fys. **26 A**, Nr 4, 1—5 (1937).

In the author's opinion a physical law, as distinct from a physical theorem, is a statement about physically measurable quantities, though auxiliary (non-measurable) quantities are often introduced for convenience. The paper begins with a discussion of the logical consequences of this view, and Milne's theory is then examined in the light of the discussion. As far as can be stated in a few words, the author's conclusion is as follows: That inasmuch as the only instruments allowed by Milne are observers' non-transportable clocks, the only quantitative results that can have a meaning in his theory are those which state something about the position of the hands of a clock. Distances, etc., must be regarded as auxiliary non-measurable quantities, so that statements about them can have no physical significance, or are to be regarded as hypotheses.

*H. S. Ruse (Southampton).*

**Shapley, Harlow:** *Note on the problem of the expanding universe.* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **24**, 148—154 (1938).

**Wataghin, G.:** *Sopra un sistema di equazioni gravitazionali del primo ordine. I.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **26**, 285—289 (1937).

Die Gleichung  $V_{\nu\mu} = R_{\nu\mu}^{\cdot\cdot\lambda}$ , welche für jeden Riemannschen Raum gültig ist, wird aus  $\nabla_{\mu} \alpha^{\cdot\cdot\lambda}_{\cdot\cdot B} = 0$  abgeleitet. Dabei genügt  $\alpha^{\cdot\cdot\lambda}_{\cdot\cdot B}$  der Gleichung  $\alpha^{\cdot\cdot} \alpha^{\lambda} = g^{\lambda}$ . Die Gleichung  $V_{\nu\mu} = 0$  wird als Einsteinsche Gravitationsgleichung bezeichnet. *Haantjes.*

**Datt, B.:** *Über eine Klasse von Lösungen der Gravitationsgleichungen der Relativität.* Z. Physik **108**, 314—321 (1938).

The author obtains a general solution of the relativistic gravitational equations for a spherically symmetric universe filled with incoherent matter of variable density. He first shows that the metric may be reduced to the form

$$ds^2 = -e^{\lambda} dr^2 - e^{\mu} r^2 (d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\Phi^2) + dt^2,$$

where  $\lambda, \mu$  are functions of  $r$  and  $t$  only, and then obtains integrated formulae giving  $\lambda, \mu$  and the density  $\rho_{00}$  in terms of  $r, t$  and three arbitrary functions of  $r$ . He concludes by deducing explicit formulae for a number of special cases. *H. S. Ruse.*



- Fiorentini Campolieti, Flora:** Una particolare soluzione dinamica del problema cosmologico. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 26, 319—324 (1937).  
**Fiorentini Campolieti, Flora.** Una particolare soluzione dinamica del problema cosmologico. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 26, 377—382 (1937).

The universe studied in this paper is characterised by

$$ds^2 = V^2 dt^2 - d\rho^2 - \rho^2 d\vartheta^2 - \rho^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2,$$

where  $V$  is assumed to be a function of  $\rho, t$  only. The field equations give

$$V = c(t) \{1 - h(t)(1 - \rho^2/\rho_0^2)\},$$

where the functions  $c(t), h(t)$ , which are a priori arbitrary, are shown from thermodynamical considerations to be subject to certain limitations of a qualitative character. In such a universe the displacement of the spectral lines of the extragalactic nebulae varies to a first approximation linearly as the distance  $r$ , and to a second approximation is given by a formula of the type

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = Ar + Br^2.$$

*H. S. Ruse (Southampton).*

**Jankowski, K.:** Hydrodynamische Grundlagen der Kosmogonie. III. Geodätische Bahnen gegenüber den Relativitätsbahnen. Astron. Nachr. 264, 345—360 (1938).

I, II vgl. dies. Zbl. 16, 88, 187, 381.

**Iwatsuki, Toranosuke, Yosataka Mimura and Kakutarô Morinaga:** Born's electrodynamics in terms of wave geometry. J. Sci. Hiroshima Univ. A 8, 43—50 (1938).

The authors look upon the conditions of integrability of the fundamental equation for  $\Psi(V_\mu \Psi = \Sigma_\mu \Psi)$  as the field equations due to the electromagnetic field. These integrability conditions are

$$K_{kji h} + p_{kj}^* p_{ih}^* + \sigma^2 f_{kj} f_{ih} = 0 \quad (1)$$

where  $p_{ij}^*$  and  $f_{ij}$  are two orthogonal simple bivectors (this Zbl. 17, 238). It is shown that

$$\partial_{[j} p_{i]h}^* = 0, \quad \partial_{[j} f_{i]h} = 0, \quad p^{ih} = \frac{1}{2} i^{ihjk} p_{jk}^* = \rho f^{ih}, \quad (2)$$

where  $i^{hijk}$  denotes the unit 4-vector. The last equation can be written by a suitable choice of  $\sigma^2$  in the following form:  $p^{ij} = \frac{f^{ij}}{\sqrt{1+F}}$  ( $F = \frac{1}{2} f_{ij} f^{ij}$ ). Then the equations (2)

have the form of the fundamental equations of Born's theory. A consequence of the theory is  $G = \frac{1}{2} f_{ij} f^{*ij} = 0$ , which equation needs not to hold in Born's theory. The equation for  $\Psi$  together with (1) are proposed as the fundamental equations in the relativistic quantum mechanics.

*J. Haantjes (Delft).*

**Sibata, Takasi:** Wave geometry unifying Einstein's law of gravitation and Born's theory of electrodynamics. J. Sci. Hiroshima Univ. A 8, 51—79 (1938).

In the spinspace belonging to the 4-dimensional Riemannian space there exist two invariant planes. Every spinvector  $\psi$  can be decomposed into two vectors  $\psi_1$  and  $\psi_2$  lying in the invariant planes. The author makes the following assumption. There exist two spinvectors  $\psi$  and  $\varphi$ , such that by the parallel displacement of a vector  $v^i$ , for which  $v^i \gamma_i \psi_2 = 0$ , the expression  $\xi^j \partial_j v^i \gamma_i \psi_2 = 0$  for every  $\xi^j$ , which satisfies the equation  $\xi^i \gamma_i \varphi_1 = 0$  and in the same way, that from  $v^i \gamma_i \psi_1 = 0$  follows that  $\eta^j \partial_j v^i \gamma_i \psi_1 = 0$  for every  $\eta^j$ , for which  $\eta^i \gamma_i \varphi_2 = 0$ . The  $\gamma_i$  satisfy the equation  $\gamma_i \gamma_j = g_{ij}$ . This leads to a differential equation for  $\psi$  and  $\varphi$  (the fundamental equation). The author considers the special case, that this equation is  $V_i \psi = \Lambda \gamma_i \varphi$ . The condition of integrability is

$$K_{ijkl} = \frac{1}{4} i_{ijpq} i_{klrs} K^{pqrs} \quad (1)$$

where  $i_{ijpq}$  is the unit 4-vector. It is shown that (1) is equivalent with Einstein's law of gravitation ( $K_{ij} = \lambda g_{ij}$ ).  $\Lambda = fI$  and  $\varphi = \psi$  lead to the de Sitter solution. Furthermore it is shown that Born's theory of electrodynamics is implied in this wave geometry as a special case (absence of material fields) (comp. the prec. rev.).

*Haantjes (Delft).*

Wataghin, Gleb: Sur la théorie des neutrinos. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 425—427 (1938).

Verf. untersucht die Hypothese, daß die Partikel des Feldes  $\alpha_{\cdot B}^{*4}$  identisch sind mit den Neutrinos. J. Haantjes (Delft).

### Astrophysik.

Landau, L.: On the origin of stellar energy. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 17, 305—306 (1937).

The formation of neutrons in a star allows its material to attain very much higher densities than are otherwise possible. The process is endothermic, but the energy necessary for it can be supplied by the liberation of gravitational energy as the material acquires the resulting greater compressibility, provided the total mass be sufficiently great. The author estimates that if the matter in the neutronic state has constant density  $10^{14}$  g/cm<sup>3</sup> the neutronic phase will be stable if the star has mass  $M > 0,05$  solar mass, while if the neutrons behave like a Fermi gas it is sufficient if  $M > 10^{-3}$  solar mass. When  $M$  is greater than its critical value, the formation of the neutronic phase liberates a large amount of energy. The author suggests that the steady growth of a neutronic core is the source of energy-generation in a star. He estimates that the total radiation of the Sun and of  $\beta$ -Orionis could in this way be accounted for if they are supposed to have formed neutronic cores of masses  $3 \times 10^{-3}$  and 0,1 of the solar mass, respectively. W. H. McCrea (Belfast).

Russell, Henry Norris: Fitting atmospheres to stars. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 98, 199—202 (1938).

It is shown that, if in a model star in an equilibrium configuration the outer layers be replaced by material of arbitrarily different composition, then, so long as the mass of these layers is a small fraction of the total mass  $M$ , the new model will possess an equilibrium configuration differing very little in radius  $r$ , luminosity  $L$ , and interior density distribution, from the original one. It appears that the problems of the equilibrium of the interior and of the surface layers of a star are practically independent, except for the occurrence of the same (observable) parameters  $M, L, r$  in each problem. Certain other consequences regarding the applicability of Vogt's theorem, and also the possibility of estimating the hydrogen abundance in the interior, are discussed. This work has an important relation to that of Milne (this Zbl. 18, 46).

W. H. McCrea (Belfast).

Kothari, D. S., and B. N. Singh: The relation of electron gas pressure to radiation pressure in degeneracy and non-degeneracy. Z. Astrophys. 15, 143—153 (1938).

It is shown that in a degenerate electron gas the ratio  $\delta$  of gas pressure to radiation pressure is in all cases (except when the degeneracy is only incipient) large compared to unity. The converse is not true. The paper contains a large number of formulae for the properties of a degenerate gas appropriate to various cases of relativistic and non-relativistic degeneracy, together with the corresponding asymptotic forms. The regions in which the latter may be employed as valid approximations are stated. Results are shown in tables and diagrams; an instructive figure shows lines of constant  $\delta$  in a  $\log n - \log T$  diagram ( $n$  = electron-concentration,  $T$  = temperature) in which the regions are indicated for which the gas is non-relativistic non-degenerate, non-relativistic degenerate, relativistic non-degenerate, relativistic degenerate. McCrea.

Spitzer jr., Lyman: New solutions of the equation of radiative transfer. Astrophys. J. 87, 1—8 (1938).

The Eddington-Strömgren equation of radiative transfer is solved accurately for two general types of variation of  $\eta_\nu$ , the ratio of the line and continuous absorption coefficients, with optical depth. These are:

$$1 + \eta_\nu = A(1 + D\tau)^q, \text{ where } \tau \text{ is given by } d\tau = (1 + \eta_\nu) d\tau; \quad (\text{I})$$

$$1/(1 + \eta_\nu) = L + Me^{-u\tau}. \quad (\text{II})$$



Here  $t_r$  is the optical depth in the line;  $A, D, s, L, M, u$  are constant parameters. Formula suitable for numerical applications are given. *W. H. McCrea* (Belfast).

**Fujita, Yoshio:** Dissociation of molecules in the carbon stars. *Proc. Phys.-Math. Soc. Jap.*, III. s. 20, 149—159 (1938).

By a carbon star the author means a star, in the atmosphere of which the carbon atoms are more abundant than in an ordinary star, the abundance of other elements being the same. In the present paper he first derives an equation which expresses the electron pressure as a function of temperature and surface gravity, and shows how electron pressure and surface gravity depend on luminosity, mass and temperature. By application of these results he tries to explain the scattering of observational points in Shane's diagram, in which the band intensities in  $CN$  and  $C_2$  bands are plotted against the spectral types. The scattering is ascribed to differences in the sequences of luminosity, mass and temperature. In a previous paper [see *Jap. J. Astron. Geophys.* 13, 21 (1935)] the author has discussed a similar problem in the hydrogen stars by analogous methods. *Steensholt* (Oslo).

**Biermann, L.:** Konvektion im Innern der Sterne. II. *Astron. Nachr.* 264, 361—396 (1938).

This continues the author's previous work under this title (this *Zbl.* 12, 425), and extends the work to the study of the outer layers of stars. Before giving the theoretical investigation, the author states that it will lead to the working hypothesis that the giant stars are mainly in internal convective equilibrium, are absolutely brighter than stars of the same mass in the main sequence, and have extended turbulent atmospheres. He compares these predictions with observation, and finds in particular a certain amount of support for the existence of photospheric turbulence in a number of bright stars. The theoretical investigation is given under the following heads: 1. The adiabatics for pure hydrogen. 2. Influence of other elements, which is shown to be small in the present problems. 3. Departures from adiabatic pressure-gradients. The author finds conditions under which the adiabatic pressure-gradient is a valid approximation, in spite of the effects of turbulence. 4. Turbulence velocity and the velocity of sound. When these are of the same order of magnitude, the turbulence affects the density distribution and energy-transport. 5. The limit of thermal stability in the  $\log P - \log p_R$  diagram. (The usual notation is used.) 6. Pressure in the photosphere. 7. The pressure and the turbulence velocity ( $v^*$ ) at the boundary of the hydrogen convection zone (WKZ). The calculation of  $v^*$  depends on certain assumptions about the size of the turbulent "elements". 8. Discussion and conclusions. It is concluded that for all stars of mean and late spectral types the temperature gradient down to the boundary of the WKZ is to a first approximation adiabatic. Further the author considers that in all these stars the convection region must extend to very high temperatures ( $T = 10^8 - 10^7$ ), and in fact that the giant stars must be entirely convective, while the main-sequence stars must possess a core in radiative equilibrium. 9. The complete convective stellar model. The author gives an analytical investigation to a suitable order of approximation. He obtains a 2-parameter set of solutions involving  $L, M, R$ , and so a mass-luminosity relation. In particular he studies solutions in which thermal stability is just attained at the centre, while the rest of the star is convective. These solutions form a one-parameter family, which the author finds to agree well with the main sequence. The stars to the right of the main sequence are then fully convective and also secularly unstable; they follow a mass-luminosity relation of the form  $L \propto M^{8/7} R^{31/9}$  (approximately) if the photosphere is supposed in hydrostatic equilibrium. The partially convective solutions, on the other hand, depart by only about one magnitude from Eddington's mass-luminosity law. 10. The mass-luminosity law. The author discusses how far this is influenced by detailed characteristics of the photosphere. Also he shows that the mass-luminosity law in (9) leads to impossible values for the masses of giant stars. So he considers that the hypothesis



of hydrostatic equilibrium in their photospheres is inapplicable in these stars, and instead concludes that they have extensive turbulent atmospheres.

*W. H. McCrea (Belfast).*

**Gleissberg, W.:** A minimum theorem in the theory of internal constitution of stars. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 98, 164—169 (1937).

The standard notation is used, except that  $4\pi\bar{\epsilon}$  is the mean rate of energy-generation inside radius  $r$ . Defining

$$I = \int_0^M [Q_1^2 + Q_2^2 - (a_1 p_g + a_2 p_r)] dM(r),$$

where

$$Q_1 = r^2 (dp_g/dM(r) + dp_r/dM(r)), \quad Q_2 = (r^2/\sqrt{k\bar{\epsilon}}) (dp_r/dM(r)),$$

$$a_1 = G/2\pi, \quad a_2 = (G + 1/c)/2\pi,$$

it is proved: A configuration which gives a minimum value to the integral  $I$  in comparison with all admissible neighbouring configurations is an equilibrium configuration, that is a configuration satisfying the standard equations of mechanical and radiative equilibrium. In comparing any configuration with a neighbouring one, the latter is "admissible" if  $M(r)$  and  $k\bar{\epsilon}$  are the same functions of  $r$  as in the primary configuration. The functions  $\rho$ ,  $k$ ,  $\bar{\epsilon}$  are assumed positive, and there is supposed to be no central singularity.

*W. H. McCrea (Belfast).*

**Krook, Max:** Ionisation in stellar atmospheres. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 98, 204—213 (1938).

In a stellar atmosphere the degree of ionisation of the material at any point is not given strictly by the Saha formula appropriate to the "local temperature"  $T$  defined in the usual way. For the density of radiation in frequency  $\nu$  is not given by Planck's function  $B_\nu(\tau)$ , but by a function  $J_\nu(\tau)$ , which has to be calculated from the equations of radiative transfer,  $\tau$  being the optical depth of the point considered. Woltjer [Physica 5, 406 (1925)] has given an expression for the correction factor to be applied to the Saha formula when this effect is allowed for. The object of the present paper is to estimate the magnitude of this correction, with special reference to stars of type similar to the Sun. The author does this by calculating  $J_\nu(\tau)$ , firstly on the hypothesis that the continuous absorption coefficient  $k_\nu$  is independent of  $\nu$ , and secondly for a  $k_\nu$  which takes different constant values in three regions of the spectrum, selected in such a way as to reproduce the main effects of the contributions of the various constituents of the atmosphere to the continuous absorption. The first hypothesis is shown by numerical examples to lead to important corrections. But the second one, which presumably is the significant one, leads to inappreciable corrections except in a surface layer of very small optical depth. The general conclusion is that the simple Saha formula may safely be used in calculating the ionisation in a stellar atmosphere, in all cases of practical importance, reasons being given for extending this conclusion to stars with surface temperatures greater than that of the Sun.

*W. H. McCrea (Belfast).*

**Tuominen, Jaakko:** On the mass concentration in gaseous stars and allied problems. Ann. Acad. Sci. Fennicae A 48, Nr 16, 84 pag. (1938).

Verf. studiert in dieser Arbeit die äußeren Teile und die Massenkonzentration verschiedener ideal gasförmiger Sternmodelle, indem er verschiedene Formen der Gesetze für Opazität und Energieerzeugung annimmt. Er drückt diese Gesetze in der Form aus:

$$\kappa = \kappa_1 \rho^p / T^q, \quad \epsilon = \epsilon_1 \rho^m T^n,$$

wo  $\kappa_1$ ,  $\epsilon_1$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $m$ ,  $n$  gewisse Konstanten sind. Nachdem die allgemeinen Grundgleichungen des hydrostatischen Gleichgewichts aufgestellt und auf eine bequeme Form transformiert worden sind, wird gezeigt, daß Modelle mit endlicher Oberflächentemperatur unendlich große Massen und Radien haben. Das weitere Studium wird dann auf Modelle mit Oberflächentemperatur gleich Null beschränkt. Verf. zeigt nun,



daß für  $q/p - 3 \leq 0$  der Temperaturgradient an der Oberfläche des Sterns endlich bleibt, während er für  $q/p - 3 > 0$  verschwindet. Modelle mit  $q/p - 3 \geq 1$  haben keine endliche Masse. Wenn nun die Masse konstant gehalten wird, während  $q/p - 3$  von Null wächst, steigt die Massenkonzentration sehr rasch. Verf. hat auch die Massenkonzentration von Sternmodellen mit konstanter Energieerzeugung ausführlich untersucht. Sein Hauptergebnis ist, daß die Massenkonzentration solcher Modelle mit wachsender Masse zu- oder abnimmt, je nachdem  $q/p - 3 > 0$  oder  $q/p - 3 < 0$  ist. Im dritten Teile der Arbeit hat Verf., um die Abhängigkeit der Massenkonzentration von der Form des Gesetzes der Energieerzeugung zu studieren, zwei Sternmodelle numerisch berechnet, nämlich die Fälle  $m = n = 0$  und  $m = 1, n = 10$ . Für die Opazität nimmt er das Kramers-Eddingtonsche Gesetz als gültig an. Es ergibt sich, daß im ersten Modell die Massenkonzentration ungefähr 3mal größer als im Standardmodell ist, während im letzten Modell die Massenkonzentration nur die halbe Größe hat. Aus Beobachtungen über Doppelsterne hat man Massenkonzentrationen berechnet, die höchstens nur ein Drittel des Wertes im Standardmodell betragen. Wegen weiterer Einzelheiten muß auf die Originalarbeit selbst verwiesen werden; hier konnten nur die Hauptergebnisse angegeben werden. *Steensholt* (Oslo).

**Severny, A. B.: On the coefficient of the Compton opacity at the low temperatures.** Astron. J. Soviet Union 15, 7—13 (1938).

The author deduces a general formula for the coefficient of the Compton opacity, and gives a numerical comparison of the coefficient of the photoelectric absorption (as given by the theory of Kramers) and the coefficient of absorption due to Compton scattering by free electrons. The electrons are assumed to have a Fermi distribution in phase space. The author considers only non-degenerate conditions of the electron gas, i.e. the case  $kT \ll m_0 c^2$ , and calculates the coefficient of the Compton absorption for the case  $h\nu \ll mc^2$ . The result is in agreement with that of Dirac. *Steensholt*.

**Ambarzumian, V. A., and M. A. Vashakidse: On the interpretation of the anomalous Balmer decrement in the spectra of late type stars with emission lines.** Astron. J. Soviet Union 15, 14—23 u. engl. Zusammenfassung 23 (1938) [Russisch].

**Durand, Georges: Sur l'application de la relation masse-luminosité au calcul des parallaxes des étoiles doubles à éclipses.** C. R. Acad. Sci., Paris 206, 490—492 (1938).

Verf. benutzt zur Bestimmung der Parallaxe von Bedeckungsveränderlichen das Eddingtonsche Massen-Leuchtkraftgesetz. Dadurch, daß es auf beide Komponenten angewendet werden kann, erhält man 2 Werte für die Parallaxe. Er untersucht dann noch die Abweichung dieser beiden Werte voneinander für 22 Bedeckungsveränderliche. *G. Schrutka* (Wien).

**Vogt, H.: Der Einfluß der Rotverschiebung auf die Helligkeiten der außergalaktischen Nebel.** Astron. Nachr. 263, 167—168 (1937).

Die scheinbaren Helligkeiten der außergalaktischen Nebel erfordern nach Hubble die Korrektur  $\Delta m = a \cdot \frac{d\lambda}{\lambda}$  ( $d\lambda$  = Rotverschiebung), wo der theoretische Wert von  $a$  gleich 4,0 oder 3,0 ist, je nachdem ob die Ursache der Rotverschiebung in einem Geschwindigkeitseffekt oder in einem vom Dopplerschen Prinzip ganz unabhängigen Effekt besteht. Nach Ansicht des Verf. würde im ersten Fall die Berücksichtigung des Umstandes, daß die Nebelhelligkeiten wegen der ganz verschiedenen Abstände der Nebel verschiedenen Abgangszeiten des Lichtes entsprechen, zur Folge haben, daß  $a$  statt des Wertes 4 den Wert 2 annimmt. *H. Straßl* (Göttingen).

**Robertson, H. P.: The apparent luminosity of a receding nebula.** Z. Astrophys. 15, 69—81 (1938).

M. v. Laue has (this Zbl. 17, 144) re-derived Tolman's expression for the apparent luminosity of a receding nebula using, instead of the corpuscular theory, the electromagnetic theory of radiation. However, v. Laue based his result on certain interpretations of the general theory of relativity, which are contrary to those usually



followed as a fundamental part of the standard theory. Notably, he assumes that in the expanding universe "rigid" measuring appliances share in the general expansion. The present author re-calculates the result on the electromagnetic theory, and shows that, when all the interpretations are made to conform to the usual theory, the effects of v. Laue's departures from this theory compensate each other, and Tolman's expression again emerges. Finally he shows the untenability of a criticism of this result made by Vogt [Astron. Nachr. 263, 168 (1937); see the prec. review]. He does this by comparing Tolman's and Vogt's procedures as they would apply in the special theory of relativity. This incidentally leads to a derivation in this case of the apparent luminosity of an arbitrarily moving nebula, which is given in an Appendix. *W. H. McCrea.*

**Lindblad, Bertil:** On the theory of spiral structure in the nebulae. *Z. Astrophys.* 15, 124—136 (1938).

Die Arbeit bringt eine nochmalige Übersicht über die in einer Reihe früherer Publikationen vom Verf. entwickelten Vorstellungen und theoretischen Untersuchungen über die Entwicklung der Spiralstruktur von Nebeln. Ausgehend von asymptotischen Bahnen am Rande abgeplatteter Massenverteilungen untersucht der Verf. insbesondere die Auswirkung von Gezeiteneffekten nach außen geratener Materie. Mehrere charakteristische Eigenschaften der beobachteten Spiralnebel werden von der Theorie geliefert.

*H. Straßl* (Göttingen).

**Klauder, H.:** Über die Stabilität von Dunkelwolken. *Astron. Nachr.* 262, 233—256 (1937).

Nach einem im Grundsätzlichen auf Tisserand zurückgehenden Verfahren untersucht der Verf. die Bewegung eines zu einer Dunkelwolke gehörenden Teilchens unter dem Einfluß folgender Kräfte: 1. Anziehung des Milchstraßensystems als Ganzes und Scherungskräfte der ungleichförmigen galaktischen Rotation, 2. Eigenanziehung der Wolke, 3. Druckkräfte der Strahlung der außerhalb und innerhalb der Wolke gelegenen Sterne. Die Dunkelwolke soll großen Abstand vom galaktischen Zentrum haben und zur Vereinfachung der mathematischen Behandlung als kugelförmig vorausgesetzt werden; die Einstrahlung von Sternlicht erfolge gleichmäßig über den ganzen Himmel. Bedeuten  $a$  den Abstand des Wolkenmittelpunktes vom galaktischen Zentrum,  $f(a)$  die vom Milchstraßensystem auf die Masseneinheit parallel zur galaktischen Ebene ausgeübte Kraft,  $\varrho$  den Abstand des Teilchens vom Wolkenmittelpunkt,  $U(\varrho)$  die effektive Eigenanziehung der Wolke (Kräfte 2. und 3.), so wird das Teilchen unter allen Umständen die Wolke verlassen, wenn der als Stabilitätskriterium eingeführte Aus-  
druck  $\frac{df(a)}{da} - \frac{f(a)}{a} + \frac{U}{\varrho} = A$  negativ ist. (Für die Vertikalkomponente gilt eine entsprechende Beziehung.) Aber auch falls  $A$  positiv ist, können Teilchen die Wolke verlassen, wenn die mittlere Geschwindigkeit der Partikel hinreichend groß oder die Dichte der Wolke genügend klein ist. Im Anschluß an die Beobachtungsergebnisse mehrerer Autoren schätzt der Verf. die Zahlenwerte der in das Stabilitätskriterium eingehenden Größen ab. Wolken mit einem Durchmesser zwischen 50 und 100 pcs und einer Gesamtabsorption von  $1^m$  liefern  $A > 0$ . Eine weitere Abschätzung ergibt, daß der Einfluß der inneren Geschwindigkeiten auf die Stabilität einer Dunkelwolke den der scherenden Kräfte der galaktischen Rotation stark überwiegt. Der Auflösungsvorgang instabiler Dunkelwolken in der Milchstraßenebene wird zahlenmäßig an einigen Beispielen verfolgt; dabei erweist sich der Einfluß gegenseitiger Zusammenstöße von Teilchen als praktisch bedeutungslos. Nur bei einer Wolke mit positivem  $A$  können solche Zusammenstöße entscheidend werden, dann allerdings unter besonderen Umständen sogar bewirken, daß die Lebensdauer der Wolke kaum größer ist als die einer solchen mit negativem  $A$ . Schließlich werden örtliche Schwankungen des Gravitations- und Strahlungsfeldes zur Folge haben, daß auch die Stabilitätsverhältnisse der Dunkelwolken im Milchstraßensystem von Ort zu Ort mehr oder weniger variieren. *H. Straßl.*